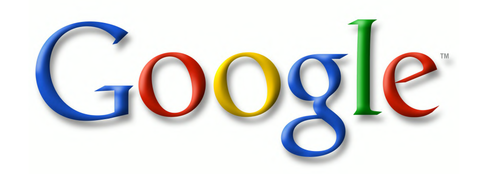
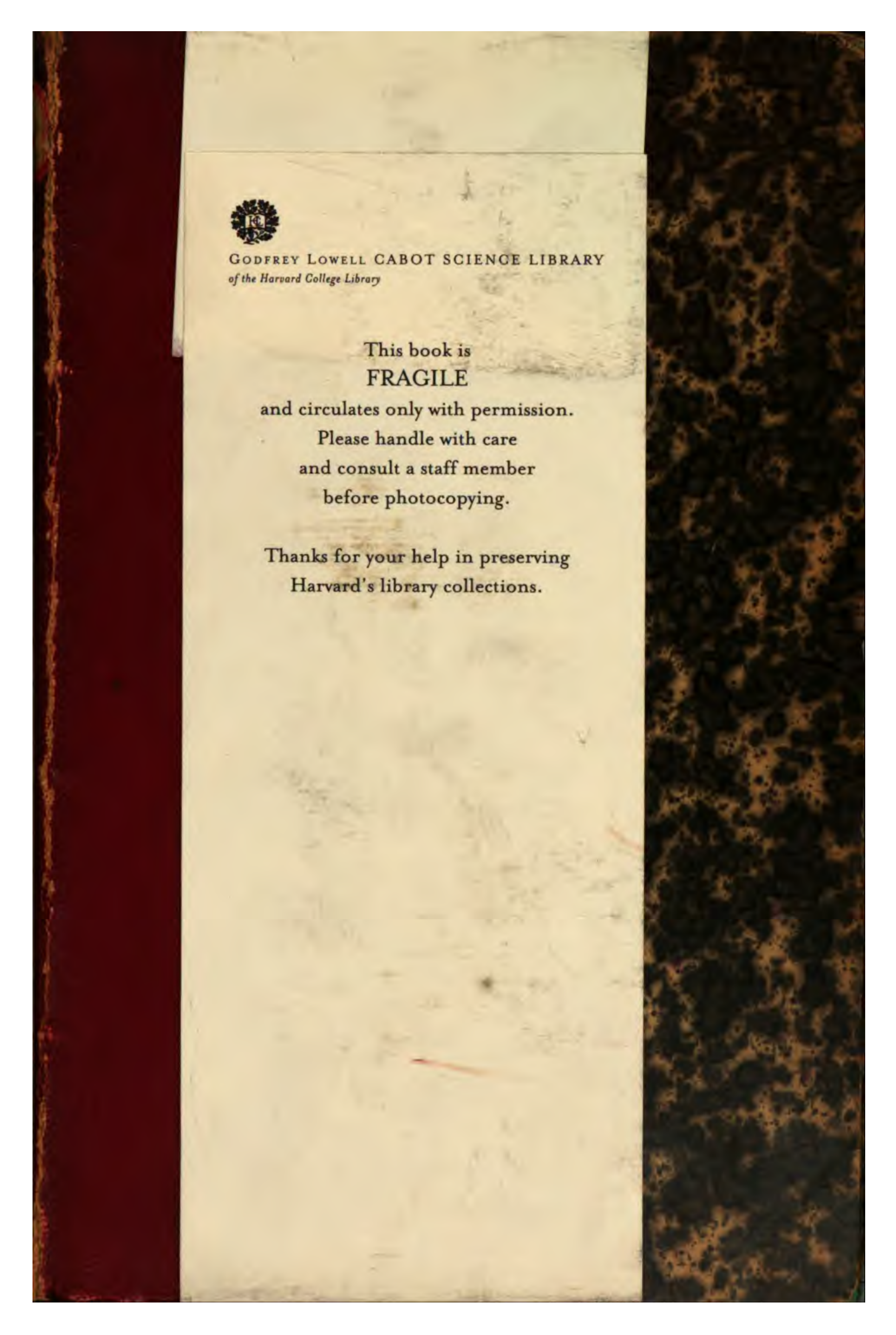
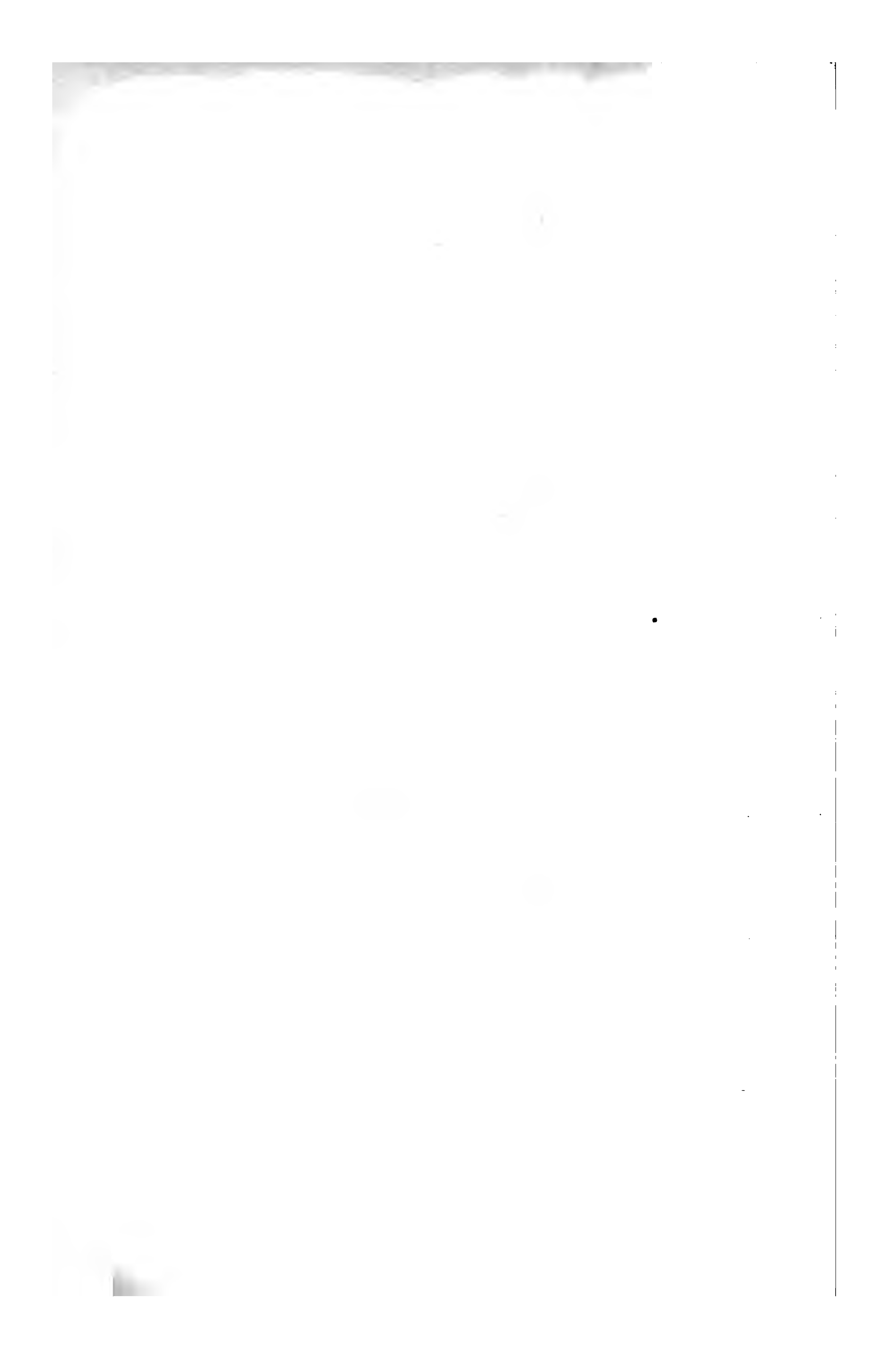




GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library
This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.
Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.







COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

Paris. — Imp. E. Bernard & Cie, 71, rue La Condamine

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE SPÉCIALE DU GÉNIE CIVIL DE GAND

PAR

J. BOULVIN

INGÉNIEUR HONORAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DU GÉNIE MARITIME DE FRANCE

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS MARITIMES DE L'ÉTAT BELGE

1er FASCICULE

THÉORIE GÉNÉRALE DES MÉCANISMES

avec 164 figures dans le texte



PARIS

E. BERNARD ET Cie, IMPRIMEURS-ÉDITEURS

LIBRAIRIE | IMPRIMERIE

53ter, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS | 71, RUE LA CONDAMINE, 71

1891

AVANT-PROPOS

Ce cours suppose connue la « *Cinématique appliquée* » c'est-à-dire la composition des *mécanismes* et leurs propriétés, en tant qu'on les envisage au point de vue de la géométrie des mouvements. Pour procéder d'une manière rationnelle, nous devrions diviser notre ouvrage en deux parties, dont la première comprendrait l'exposé synthétique des procédés très nombreux que l'on trouve réalisés dans les machines existantes, procédés qu'on a l'habitude de considérer comme résultant de l'invention, et qui échappent ainsi à toute règle de composition; après quoi nous pourrions aborder *l'étude spéciale*, ou physiologie des machines, dans laquelle on soumet les systèmes à une analyse physique et mécanique permettant de déterminer les circonstances les plus favorables à leur bon fonctionnement.

Cette deuxième branche, basée sur la mécanique rationnelle, a devancé la première, et est devenue depuis longtemps, surtout par les travaux de Poncelet, une science classique, connue sous le nom de *Mécanique appliquée aux machines*.

Dans l'état actuel de nos connaissances, la réalisation de ce plan, esquissé par Reuleaux, présenterait, pour le lecteur qui n'est pas encore initié, plusieurs inconvénients; lors d'une première étude, l'esprit suit plus facilement l'ordre déterminé par l'invention que l'ordre synthétique, c'est pourquoi nous avons cru devoir nous en tenir au système généralement adopté, et qui consiste à grouper les machines d'après l'usage auquel elles sont destinées, en les traitant au double point de vue de leur composition et de leur rendement.

La construction des organes de machines, qui n'est pas abordée dans cet ouvrage, doit fournir les derniers matériaux qui permettent de réa-

liser, dans les meilleures conditions, les conceptions mécaniques connues, et d'en élargir le champ.

A l'exemple de Rühlmann, on peut diviser toutes les machines employées en deux grandes classes : les machines servant à mesurer et à compter, et celles qui accomplissent des travaux mécaniques ; nous ne nous occuperons, parmi celles du premier groupe, que des appareils qui interviennent directement dans la mesure des éléments du travail (*Théorie générale des mécanismes*, Chapitre IV) ; les machines de la seconde catégorie, comprennent les récepteurs, les transmissions et les opérateurs, mais cette division, employée par Poncelet, est purement artificielle, et ne sert qu'à faciliter l'étude, car on peut toujours, par la pensée, isoler l'une quelconque des trois parties, et la considérer comme un système qui reçoit, transmet et effectue un travail ; dès lors, le récepteur, la transmission et l'opérateur, qu'ils soient pris ensemble ou isolément, sont soumis aux lois de l'équilibre dynamique, et il y a lieu tout d'abord d'étudier les circonstances du mouvement et l'effet utile d'un groupe d'organes quelconque.

Tel est l'objet de la *Théorie générale des mécanismes*, qui comprend, d'ailleurs, la théorie des transmissions envisagées au point de vue de la transformation de la force, et que nous examinons sans nous préoccuper de l'origine ou de la destination du travail ; nous abordons ensuite l'étude des récepteurs ou machines motrices ; ensuite, nous passons en revue les opérateurs qui font partie du domaine de la mécanique générale, tels sont les appareils de transport et de levage, ceux qui servent à déplacer les fluides, à comprimer et raréfier les gaz, etc. Les outils de tous genres appartiennent plutôt à la technologie des industries spéciales, il en est ainsi des machines employées dans l'élaboration des matières premières, les industries textiles, etc.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MÉCANISMES

PRÉLIMINAIRES

1. — Au point de vue spécial où nous nous plaçons, les machines ont pour objet la transformation, en travail directement utilisable, de l'énergie des sources naturelles [1], elles sont donc d'autant plus parfaites qu'elles rendent disponible une partie plus grande de l'énergie que fournit la source première ; car, dans le cas même où celle-ci est gratuite, les dépenses d'établissement et d'entretien sont d'autant plus élevées, que le rendement des appareils est plus faible.

2. — La théorie des machines sert à rechercher les conditions auxquelles doit satisfaire leur agencement, les proportions et les vitesses à donner à leurs organes, et, en général, toutes les circonstances de construction et de fonctionnement nécessaires pour qu'elles produisent l'effet utile le plus élevé.

Ce problème est relativement simple pour les appareils qui reçoivent ou dépensent l'énergie sous forme de travail [2], tels sont les récepteurs

1. Reuleaux. — *Cinematique.* Savy 1877. Note 8 — analyse la définition que différents auteurs ont donnée des machines.
2. M. Maurice Lévy distingue les sources de travail alimentées par de la force, c'est-à-dire donnant l'énergie sous forme *potentielle*, et celles alimentées par du mouvement, qui fournissent l'énergie à l'état *cinétique*. — Brisse et Rouché, *Nouvelles annales de mathématiques* 1887, p. 505.

hydrauliques ou pneumatiques, les transmissions, un grand nombre d'opérateurs. Il suffit, pour analyser ces engins, de recourir aux conditions de l'équilibre des forces, et aux théorèmes généraux de la dynamique.

Il n'en est pas de même des organismes dont le jeu est accompagné de transformations physiques, comme les machines à chaleur, les machines magnéto-électriques, etc.

L'énergie calorifique, qui intervient dans les machines à vapeur, à air chaud, à gaz, est la seule qui rentre dans le domaine habituel de la mécanique appliquée ; mais il est permis de prévoir que l'électricité sera appelée à jouer un rôle important, soit dans la production, soit dans le transport du travail.

3. — Au point de vue de leur aptitude à fournir du travail, les machines se distinguent par leur puissance ; l'unité de travail est le kilogrammètre, l'unité de puissance généralement adoptée est celle qui correspond à la production de 75 kilogrammètres par seconde ou *cheval-vapeur*, employée depuis Watt [1].

1. Le cheval-vapeur de Watt équivaut à 33.000 livres-pied par minute ou environ 76 kilogrammètres par seconde ; en Autriche, l'unité de puissance est de 76 kgm, 119 par seconde. Le congrès de mécanique appliquée, tenu à Paris en 1889, a proposé une unité nouvelle de puissance : le *Poncelet*, équivalant à 100 kilogrammètres par seconde. Le cheval-vapeur et le Poncelet constituent des unités absolues qui ne s'appliquent qu'à la mesure de la puissance, et dans lesquelles la notion du temps est implicitement comprise.

CHAPITRE I

Équation générale des Machines.

§ Ier.

CAS OU LES CORPS COMPOSANT LA MACHINE NE SUBISSENT AUCUN CHANGEMENT D'ÉTAT

4. — La force F agissant sur un point matériel M, (fig. 1), on a, en désignant par m la masse du point, par v sa vitesse, et par s l'arc de trajectoire parcouru à l'instant quelconque t :

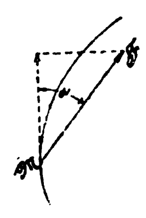


Fig. 1.

$$\text{(1)} \qquad \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{F} \cos \alpha \, ds = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{F} v \cos \alpha \, dt = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

ou, en désignant par τ le produit $\mathrm{F}v \cos\alpha$, qui exprime le travail de la force F par unité de temps à l'instant t :

$$\text{(2)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 ;$$

S'il s'agit d'un corps quelconque, dans lequel on peut considérer une infinité de points matériels m, m', m'',.... et qui est soumis en ces points à des forces extérieures F, F', F'',.... nous écrirons, pour chaque point, une équation analogue à l'équation (2), en faisant entrer, dans le premier membre, outre les travaux des forces extérieures, les travaux pro-

venant des liaisons du point avec les autres parties du système. Ajoutant membre à membre ces équations, il vient :

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt = \frac{1}{2} \Sigma m v_1^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 \tag{3}$$

Le terme $\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt$ représente la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui ont agi sur le système depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_1.

5. — L'équation (3) est applicable aux systèmes entrant dans la composition des machines, car ils sont formés de corps en général solides, assujettis par des liens inextensibles ou parfaitement élastiques; ces corps prennent appui l'un sur l'autre, ainsi que sur des corps extérieurs fixes.

Or, on peut toujours introduire, parmi les travaux du premier membre, tous ceux qui s'exercent réellement sur les différents points matériels des systèmes, soit qu'ils proviennent d'efforts extérieurs appliqués directement en ces points, soit qu'ils proviennent des liaisons ou des réactions produites par les points fixes.

Dans l'application aux machines, l'équation acquiert un sens parfaitement défini, car la plupart des pièces peuvent être considérées comme des solides invariables de forme; dans ce cas, les *travaux intérieurs* ne figurent pas dans l'équation, vu que leur somme algébrique est nulle; la force vive d'une pièce peut souvent s'obtenir très facilement, lorsqu'elle possède un mouvement simple (translation ou rotation autour d'un axe connu).

Les travaux qui proviennent de l'existence de liaisons élastiques entre deux pièces peuvent s'évaluer, dans l'ensemble, par le changement de longueur du lien ; quant aux travaux dus aux réactions des appuis, il y a lieu, pour les déterminer, de tenir compte de certains phénomènes physiques qui seront étudiés au chapitre II ; il est à peine nécessaire de remarquer que le travail des réactions, dans un ensemble de deux pièces mobiles appuyées l'une sur l'autre, ne dépend que de leur mouvement relatif.

6. — Les appuis fixes ou mobiles font toujours naître des résistances au mouvement, c'est-à-dire des forces dont le travail est de signe con-

traire à celui des forces motrices; pour cette raison on les nomme résistances passives.

7. — En résumé, il y a lieu de distinguer dans le premier membre de l'équation (3):

1° Les *travaux moteurs*, c'est-à-dire ceux que l'on applique au système dans le but de vaincre des travaux résistants, nous les désignerons, pour la période considérée, par

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_m \, dt$$

2° Les *travaux des résistances à vaincre*, et qui constituent le résultat industriel à produire; ainsi dans une machine élévatoire, ce travail correspondrait au produit du poids par la hauteur d'élévation. Nous désignons ces travaux par

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_u \, dt$$

3° Les *travaux résistants occasionnés par le jeu de la machine* (6) et provenant de diverses causes telles que le frottement des appuis, les résistances des milieux, etc., nous les désignerons par

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt$$

4° Les travaux occasionnés par suite du mouvement des pièces pesantes de la machine, lorsque ces pièces ne sont pas équilibrées; comme ces pièces repassent, après une ou plusieurs évolutions, par leurs positions premières, ou on conclut que, leurs centres de gravité décrivant des courbes fermées, ces travaux sont tantôt positifs, tantôt négatifs; pour une évolution complète, leur somme algébrique est nulle, et il est inutile de les faire intervenir dans l'équation. On peut, du reste, faire entrer les travaux dont il est ici question, dans le terme des travaux moteurs, en leur donnant un signe convenable.

5° Les travaux résistants qui proviennent des *chocs*, lorsque la machine comporte des pièces qui changent brusquement de vitesse, comme dans les anciens marteaux de forge.

On sait que, lorsque le choc se produit entre deux corps qui ne sont pas parfaitement élastiques, il en résulte toujours, pour l'ensemble des deux masses, une perte de force vive ; Poncelet a admis, dans les problèmes de l'espèce, que les corps soumis à des chocs répétés perdent rapidement toute élasticité.

Sauf dans le cas où le choc est nécessaire pour l'élaboration de la matière première, comme dans le *martelage*, on l'évite de plus en plus, et même le forgeage des grosses pièces est parfois opéré aujourd'hui à l'aide de puissantes presses.

Le choc est accidentel lorsqu'il résulte d'usures, de desserrages ; il occasionne toujours une perte de travail [1].

8.—Lorsque l'on néglige le travail absorbé par les chocs, et qu'on envisage le travail dû au poids des pièces comme faisant partie des travaux moteurs, l'équation générale des forces vives peut s'écrire

$$\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m \, dt - \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_u \, dt - \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt = \frac{1}{2}\Sigma mv_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$$

ou :

$$(4) \quad \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_u \, dt = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m \, dt - \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt - \Sigma\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2 + \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$$

9. — ***Discussion de l'équation générale.*** — Si, pour la période considérée, la force vive finale est égale à ce qu'elle était à l'origine, ou, plus généralement, si on considère le fonctionnement de la machine pendant une durée assez longue pour que la variation de force vive soit négligeable vis-à-vis des termes du travail, on a :

$$\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_u \, dt = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m \, dt - \int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt$$

d'où, si on désigne par u le rendement, c'est-à-dire le rapport du travail utile produit, au travail moteur, on a :

$$u = 1 - \frac{\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt}{\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m \, dt}$$

1. Callon, *Cours de machines*, T. I. N°s 22 et 23 considère aussi le travail des vibrations.

qui exprime, ainsi qu'on pouvait le prévoir, que le rendement de toute machine est inférieur à l'unité. Ce résultat explique aussi la stérilité de toute recherche tendant à produire le ***mouvement perpétuel.***

Lorsque l'on envisage le travail de la machine pendant la période de mise en train, c'est-à-dire lorsqu'elle part du repos :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2 = o$$

Dans ce cas on a :

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_u\, dt = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_m\, dt - \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r\, dt - \frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2$$

La moitié de la force vive gagnée se retranche donc du travail utilisé. Tandis qu'en prenant la machine pendant la période d'arrêt, à la fin de laquelle :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 = o$$

on aurait :

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_u\, dt = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_m\, dt - \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r\, dt + \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2$$

c'est-à-dire qu'on retrouve, sous forme de travail effectué par la machine, la force vive dont les pièces étaient animées à l'origine de la période.

Il est à remarquer, cependant, que beaucoup d'opérations industrielles exigeant une vitesse constante, il n'est pas possible d'utiliser les machines pendant la période d'arrêt; la force vive qu'elles possèdent lorsqu'on cesse d'actionner les opérateurs est alors perdue.

Enfin, l'équation (4) donne aussi :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 = \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2 + \Sigma \int_{t_0}^{t_1} (\tau_m - \tau_u - \tau_r)\, dt$$

Ce résultat montre que la force vive des pièces d'une machine varie, à chaque instant, d'après la valeur du terme renfermant les travaux des forces depuis l'origine à partir de laquelle on considère le mouvement.

L'arrêt se produit lorsque

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 = o$$

c'est-à-dire quand le terme des travaux prend une valeur négative égale à la moitié de la force vive à l'origine. Le danger de l'arrêt diminue lorsque la valeur $\frac{1}{2}\ \Sigma m v_0^2$ devient de plus en plus considérable, c'est-à-dire lorsqu'il y a dans la machine une grande réserve de force vive.

10. — On peut remarquer ici l'influence des masses sur la stabilité du mouvement des machines, car, à une certaine variation de force vive, répond un changement de vitesse d'autant moindre, que les masses en jeu sont plus considérables.

Si les masses étaient nulles, le mouvement ne pourrait avoir lieu pratiquement, car la vitesse prendrait une valeur infinie.

L'organe auquel on donne le nom de ***volant***, a pour but d'augmenter les masses en mouvement, et, par conséquent de diminuer les changements de vitesse qui accompagnent les variations du terme des travaux.

11. — *Mouvement uniforme.* — Appliquons l'équation des forces vives pour une période comptée depuis l'instant t_0 jusqu'à un instant variable θ, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2 + \Sigma\int_{t_0}^{\theta} (\tau_m - \tau_u - \tau_r)\, dt$$

Pour que la force vive ne varie pas, il faut :

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\Sigma\, mv^2}{d\theta} = o$$

ou :

$$\Sigma\,(\tau_m - \tau_u - \tau_r) = o \qquad (5)$$

Les valeurs τ_m, τ_u, τ_r, étant prises à l'instant θ [1].

1. On peut représenter graphiquement les termes tels que

$$\Sigma\int_{t_0}^{\theta} \tau_m\, dt$$

En se reportant (4), à l'origine de la notion nouvelle du ***travail par unité de temps***, travail que nous avons désigné par τ, on voit que l'équation (5) donne lieu à ce théorème :

Pour que la force vive de l'ensemble des pièces soit constante à tout instant, il faut que la somme algébrique des travaux de toutes les forces, tant motrices que résistantes, qui se développent sur le système, soit constamment nulle.

La propriété réciproque est évidemment vraie.

Sauf de rares exceptions, on ne peut dire qu'une machine se trouve à l'état de mouvement uniforme lorsque la somme des forces vives de ses pièces ne varie pas, car la constance de cette somme, formée d'éléments complexes, n'exige pas que chaque pièce composant la machine ait une vitesse constante.

Ainsi, dans le mécanisme de la machine à vapeur usuelle, lorsque l'arbre est à l'état de rotation uniforme, le mouvement de la tige de piston est varié, et inversement ; il y a très peu de systèmes qui soient susceptibles de prendre un mouvement uniforme ; cependant, dans beaucoup de cas, certains organes prédominent par leur masse ou par leur vitesse, et l'on peut, sans grande erreur, faire abstraction des parties accessoires.

En se reportant à l'équation (5), on voit que, dans tout système momentanément à l'état de mouvement uniforme, ou pour lequel la somme des forces vives est constante, les forces sont liées entre elles par l'équation du travail virtuel, c'est-à-dire que le système peut-être considéré comme en équilibre ; les résistances passives doivent être comptées au nombre des forces qui sollicitent les pièces.

12. — *Mouvement varié.* — En général l'équation (5) n'est pas vérifiée, et, par conséquent, le terme des travaux, au lieu d'être constamment nul,

car il suffit de porter en abscisses les valeurs de t, en ordonnées les valeurs $\Sigma\,\tau_m$ on obtient une courbe BC (fig. 2), dont l'aire ABCD est le terme cherché ; l'accroissement élémentaire de ce terme à l'instant θ, pour la durée $d\theta$, est donné par CDC'D' dont la valeur est

$$DC \times d\theta$$

c'est-à-dire que sa dérivée par rapport à θ a pour valeur DC. Mais DC est la valeur que prend, à l'instant θ, le terme $\Sigma\tau_m$, ce qui justifie l'équation (5).

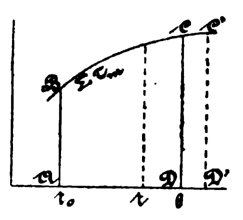


Fig. 2.

peut prendre toute valeur positive ou négative ; on peut, par la représentation graphique, établir clairement la loi de variation de la force vive en fonction du temps, car l'équation générale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \int_{t_0}^{t} [\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)]\, dt$$

Portons en abscisses les valeurs du temps (fig. 3); et en ordonnées : d'une part, les valeurs de $\Sigma\tau_m$, d'autre part les valeurs de $\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r$;

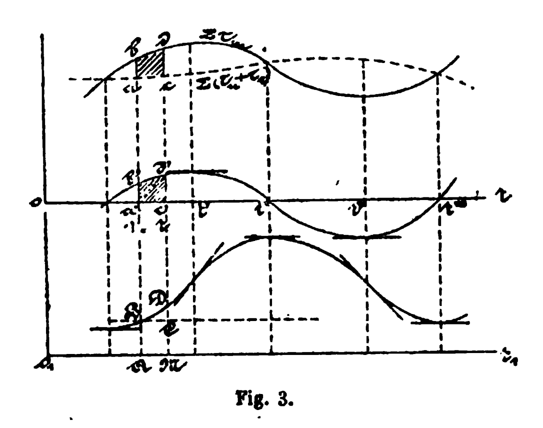


Fig. 3.

nous obtenons ainsi deux courbes, l'une, en trait plein, relative au travail moteur, l'autre pointillée, relative à l'ensemble des travaux résistants utiles et passifs. En retranchant les ordonnées, et en tenant compte du signe, on obtient une ligne qui représente la fonction

$$\Sigma \tau_m - \Sigma (\tau_u + \tau_r)$$

Pour obtenir $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$, il suffit, en chaque point tel que M, de porter

$$MC = AB = \frac{1}{2} \Sigma mv_0^2$$

et d'y ajouter la valeur de l'aire *abcd*, ou *a'b'c'd'*, qui représente la somme des travaux développés depuis l'origine t_0 jusqu'à l'instant final t. On trouve ainsi le point D, et la loi des forces vives est représentée par la

courbe BD; cette ligne, rapportée à l'axe BC, n'est autre chose que la ***courbe intégrale*** de $b'd'$, ce qui permet d'établir deux propriétés importantes:

1° *Lorsque*

$$\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r) = o$$

la somme des forces vives passe par une valeur maxima ou minima.

2° *Lorsque*

$$\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)$$

passe par une valeur maxima ou minima, la courbe des forces vives présente un point d'inflexion.

Ces propriétés peuvent être démontrées directement, car

$$\frac{d \frac{1}{2} \Sigma mv^2}{dt} = \Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)$$

et

$$\frac{d^2 \frac{1}{2} \Sigma mv^2}{dt^2} = \frac{d \left[\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)\right]}{dt}$$

Lorsque $c'd' = o$, on a donc:

$$\frac{d \frac{1}{2} \Sigma mv^2}{dt} = o$$

c'est-à-dire que la force vive passe par un maximum ou un minimun, (points t' et t''').

Lorsque $c'd'$ passe par un maximum ou un minimum,

$$\frac{d \left[\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)\right]}{dt} = o$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 \frac{1}{2} \Sigma mv^2}{dt^2} = o$$

donc, la courbe des forces vives passe par un point d'inflexion (points t'' et t'''').

On peut remarquer, en outre, qu'au moment où la force vive passe par des valeurs maxima ou minima, les forces agissant sur le système se font équilibre, pourvu qu'on y comprenne les résistances passives.

13. — ***Mouvement périodique.*** — On donne ce nom au mode particulier de mouvement pour lequel tous les organes de la machine repassent périodiquement par les mêmes vitesses; s'il en est ainsi, la somme des forces vives repasse à des intervalles de temps égaux par les mêmes valeurs [1]; ainsi, dans tout mouvement périodique, si on porte en abscisses (fig. 4), des intervalles réguliers T, correspondant à la durée

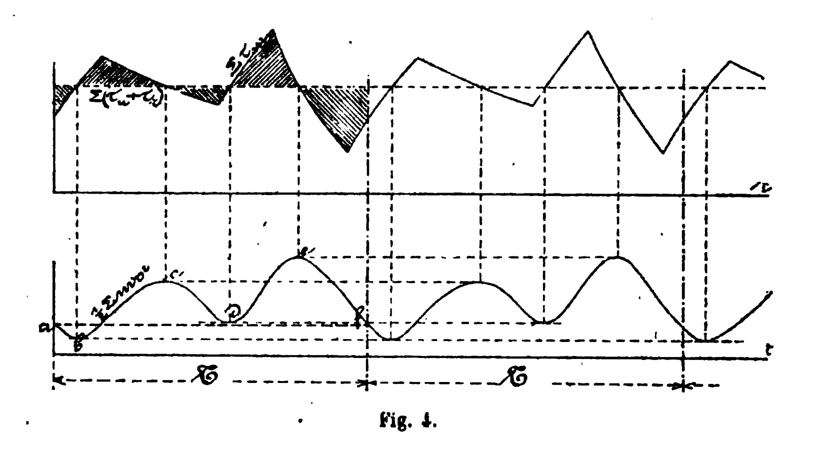


Fig. 4.

de la période, on partage la courbe des forces vives en autant de tronçons superposables : *a b c d e.*

En se reportant au mode de construction de cette courbe, on voit immédiatement que la courbe des travaux doit présenter la même propriété, c'est-à-dire que, dans tout mouvement périodique, la différence

$$\Sigma\, \tau_m - (\Sigma\, \tau_u + \Sigma\, \tau_r)$$

repasse périodiquement par la même valeur; quant à l'allure de la courbe $\Sigma\tau_m$, ou de la courbe $\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r$, elle peut notablement différer d'une période à l'autre; enfin, il est évident que, pour la durée d'une période, l'intégrale des travaux développés est nulle.

1. La proposition inverse n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas que la somme des forces vives repasse par la même valeur pour qu'un organe déterminé reprenne la même vitesse; il n'en est ainsi que pour certaines machines.

14. — ***Loi des forces vives en fonction de l'espace parcouru par l'un des points de la machine.*** — Pour pouvoir employer le mode de représentation graphique de la force vive en fonction de temps, il faut que la loi suivant laquelle se développent les travaux, tant moteurs que résistants, soit elle-même donnée en fonction du temps. Il arrive plus souvent que les forces motrices ou résistantes agissant aux divers points de la machine sont données en fonction des positions de ces divers points. On peut alors employer l'équation (1) qui, étendue à un système de masses prend la forme

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Sigma \int_{s_0}^{s} [F_m - (F_u + F_r)]\, ds$$

dans laquelle F_m, F_u, F_r, désignent les composantes tangentielles des forces motrices, des résistances utiles et des résistances passives agissant en un point du système.

Pour chaque point soumis à des forces, il y a lieu d'introduire une intégrale de même forme, entre des limites correspondantes à la position initiale et à la position finale, le signe Σ s'étend à toutes ces intégrales.

Quelle que soit la complication du système, soumis à la force motrice P', à la résistance utile Q, et aux réactions R et R' (fig. 5), on peut toujours remplacer chaque force, telle que Q, par d'autres forces dont l'une, transportée au point A, donne seule naissance à du travail; on n'aura

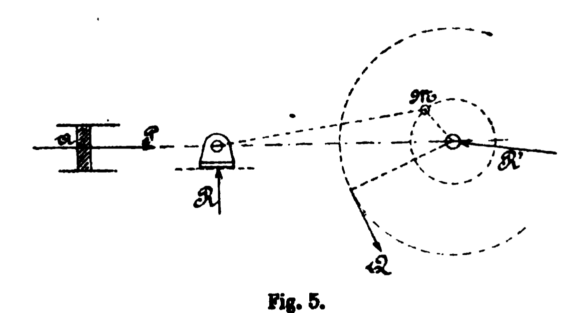


Fig. 5.

plus à considérer, dans le terme des travaux, que les forces agissant en un même point A, et l'on pourra construire un diagramme qui donne, pour toute valeur s, du chemin parcouru par ce point, le terme

$$F_m - (F_u + F_r)$$

d'où l'on passera aisément à l'expression

$$\int_{s_0}^{s} [F_m - (F_u + F_r)] \, ds$$

Nous verrons un exemple de l'application de cette méthode dans le calcul des volants.

15. — *Loi du mouvement dans un cas simple.* — Supposons que la machine soit constituée de telle manière [1] que le terme dû à l'ensemble des forces vives puisse se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2} Mv^2$$

M désignant une masse convenablement calculée, et v la vitesse d'un point choisi dans le système.

L'emploi de la méthode exposée au numéro 12 permet de tracer la loi des forces vives en fonction de l'espace parcouru par le point choisi; les ordonnées telles que AB (fig. 6), représentent les valeurs $\frac{1}{2} M v^2$, ou, par

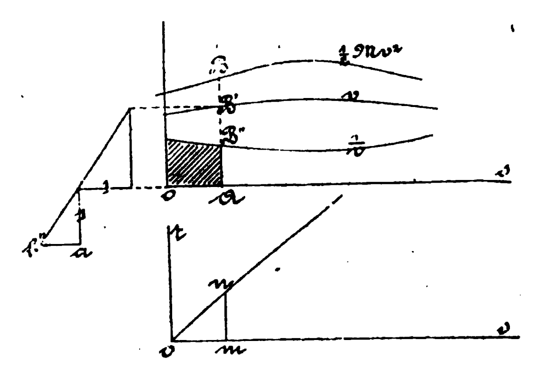


Fig. 6.

un changement d'échelle, les valeurs de v^2; on peut construire le diagramme des valeurs de v, il suffit de porter en AB', la racine de l'ordonnée de la première courbe, et d'effectuer cette construction pour chaque valeur de s, on obtiendra la loi des vitesses en fonction de l'espace parcouru.

1. Machine ne comportant que des pièces à mouvement de translation ou à mouvement de rotation.

Or, on a

$$dt = \frac{1}{v}\, ds$$

d'où

$$t = \int_o^s \frac{1}{v}\, ds$$

en supposant $t = o$ pour $s = o$.

La connaissance des valeurs v permet de trouver le diagramme de $\frac{1}{v}$ au moyen de la construction indiquée pour le point B', on porte AB" $= ab" = \frac{1}{v}$; de là, il est facile de passer à l'intégrale, mn, qui représente t, on en déduira s en fonction de t, c'est-à-dire la loi du mouvement. Réciproquement, si l'on connait la loi suivant laquelle se développent les travaux en fonction du temps, on peut en déduire $\frac{1}{2} M v^2$, et par conséquent v, d'où l'on passera à la connaissance de

$$s = \int_{t_0}^{t} v dt$$

16. — *Application.* — Pour rendre plus claire la signification des diagrammes dont il est question aux numéros 12, 14 et 15, prenons le cas d'une machine dont les pièces sont liées invariablement l'une à l'autre (comme dans un train de véhicules, ou dans une série de pièces tournantes) ; supposons que le système soit sollicité par une résistance uniforme Q (fig. 7), (comprenant les résistances utiles et les résistances passives), et par une force motrice, donnée en fonction de l'espace, par la ligne brisée P.

Admettons que la machine soit en repos pour $s = o$, la loi des forces vives sera donnée par la ligne o_1ABC, dont le coefficient angulaire est égal en chaque point à la valeur de P — Q correspondante.

La courbe O_1A'B'C', formée d'arcs de paraboles, est obtenue en prenant les racines des ordonnées de la courbe des forces vives, et, représente, si l'on mesure ses ordonnées à une échelle convenable, la loi des vitesses du système en fonction de l'espace parcouru par un de ses points, c'est-à-dire les valeurs de v.

La courbe A"B"C" donne les valeurs de $\frac{1}{v}$; enfin, la courbe continue

O_1nN.... composée d'arcs de paraboles, est la loi du temps en fonction de l'espace.

La connaissance de cette dernière courbe permet de tracer (fig. 8), le diagramme des forces vives en fonction du temps, ainsi que celui des

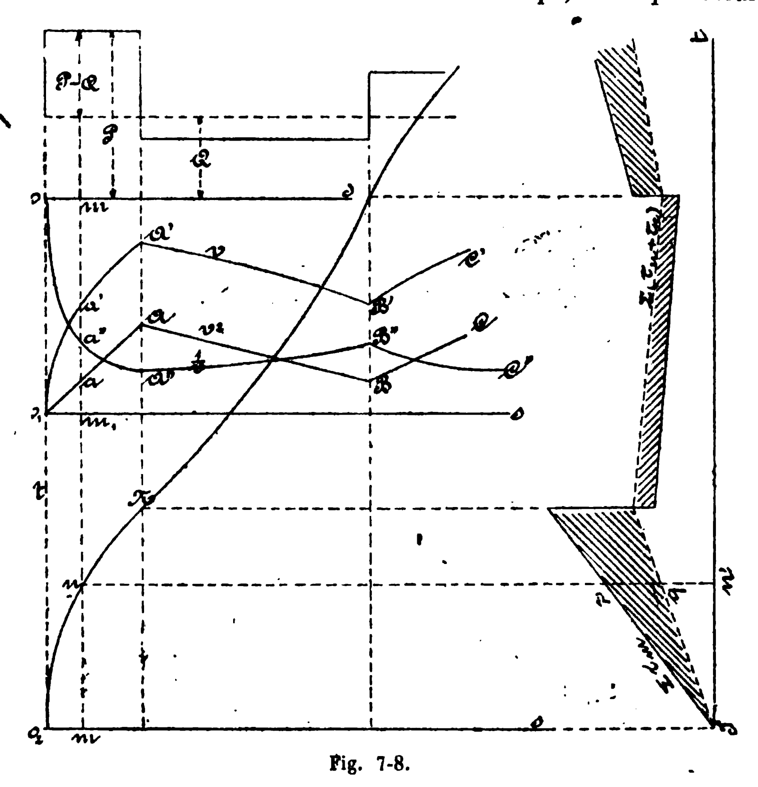


Fig. 7-8.

travaux moteurs et résistants $n'p$, $n'q$, à chaque instant, car ceux-ci sont représentés par le produit des forces P et Q par la vitesse v; on remarquera ici combien les diagrammes des travaux: $\Sigma\tau_m$, $\Sigma(\tau_u + \tau_r)$, qui, dans ce cas particulier, sont formés de lignes droites inclinées, peuvent différer de ceux des forces motrices et résistantes.

Ajoutons qu'on ne pourrait analyser le mouvement d'une manière aussi simple dans la plupart des cas de la pratique, par exemple, lorsque le système comprend des pièces à mouvement alternatif.

17. — *Exemple numérique.* — Un arbre O (fig. 9), animé d'une

vitesse de 75 tours par minute, commande par cadre une pompe à mouvement alternatif; on suppose qu'il reçoit un travail moteur, variable à chaque instant, capable de le maintenir à l'état de mouvement uniforme.

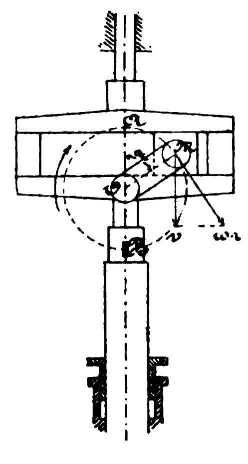


Fig. 9.

Le poids du cadre, de ses tiges, du plongeur, etc., est de 120 kilogrammes; l'effort résistant à vaincre à la levée aussi bien qu'à la descente est de 250 kilogrammes, on suppose que toutes les réactions sont normales aux surfaces frottantes c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement.

On demande de déterminer à chaque instant le travail moteur τ_m à développer sur l'arbre, et d'en déduire l'effort P, qui appliqué à l'extrémité d'un bras de levier égal à 1 mètre produirait ce travail.

Solution :

Soit p, le poids des pièces à mouvement alternatif,

Q, la résistance du piston pour la descente et la levée,

ω, la vitessse angulaire de l'arbre.

v, la vitesse linéaire du piston à l'instant t, correspondant à la position M du bouton.

Considérons comme origine le point A, où la vitesse v est nulle, et appliquons l'équation générale depuis A jusqu'en M; les pièces à mouvement de rotation ayant, par hypothèse, une vitesse constante, ne donnent lieu à aucun accroissement de force vive, et l'on a:

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g}v^2 = \int_0^t \tau_m dt - \int_0^t Q\, vdt + \int_0^t pvdt$$

d'où, prenant la dérivée, et résolvant par rapport à τ_m:

$$\tau_m = \frac{p}{g} v \frac{dv}{dt} + Qv - pv$$

On aurait de même, pour la course de bas en haut, en prenant le point B comme origine:

$$\tau_m = \frac{p}{g} v \frac{dv}{dt} + Qv + pv$$

Or, $v = \omega r \sin \alpha$,

$$\frac{dv}{dt} = \omega \, r \cos \alpha \, \frac{d\alpha}{dt} = \omega^2 \, r \cos \alpha$$

$$v \, \frac{dv}{dt} = \omega^2 \, r^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \omega^2 \, r^2 \sin 2 \alpha$$

En tenant compte des valeurs numériques,

$$r = 0{,}20$$
$$p = 120$$
$$Q = 250$$
$$\omega = \frac{2\pi \times 75}{60} = 7{,}8$$

On obtient, pour le mouvement de descente :

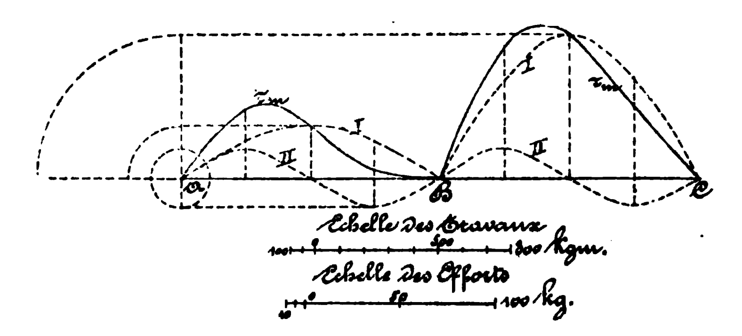
$$\tau_m = 116 \sin 2\alpha + 204 \sin \alpha$$

α variant de o à π depuis le point A.

Et pour le mouvement d'aspiration :

$$\tau_m = 116 \sin 2\alpha + 580 \sin \alpha$$

Les sinusoïdes 116 sin 2 α, 204 sin α, et 580 sin α s'obtiennent facilement (fig. 10), au moyen des circonférences ayant respectivement pour



rayons les nombres 116, 204, 580, en ayant soin de doubler les angles pour la première ; l'échelle des temps, portés en abscisses, est déterminée en remarquant que AC est la durée, connue, d'une révolution.

En ajoutant algébriquement les ordonnées des courbes I et II, on obtiendra les valeurs de τ_m pour une révolution entière.

Enfin, si P désigne la force motrice cherchée, on a

$$P\omega = \tau_m$$

ou

$$P = \frac{\tau_m}{\omega} = \frac{1}{7{,}8}\tau_m$$

Cette équation montre que les valeurs de P sont proportionnelles à celles de τ_m, ce qui était évident *a priori*, puisque la vitesse du point d'application de l'effort P est constante. Pour obtenir la grandeur de P, il suffit de mesurer les ordonnées de τ_m au moyen d'une échelle convenablement choisie.

§ II.

Equation applicable au cas ou des phénomènes thermiques s'accomplissent dans la machine.

18. — Les machines qui comprennent une source d'énergie calorifique renferment des fluides à température variable, et dont l'état peut même changer par la vaporisation ou la combustion. L'expérience établit que la chaleur peut se convertir en travail ou réciproquement, et que cette transformation s'effectue à raison d'une certaine équivalence.

Désignant par E le travail équivalent à l'unité de chaleur, nous admettons que la quantité de chaleur Q équivaut au travail QE, et qu'inversement, le travail T, communiqué à un corps, peut augmenter de $\frac{T}{E}$ calories la chaleur de ce corps.

La variation de chaleur n'est pas nécessairement accompagnée d'un changement de température, elle peut être employée à opérer un changement moléculaire (fusion d'un solide, vaporisation d'un liquide ou inversement).

Il faut du reste envisager tout corps solide, liquide ou gazeux, comme étant animé, indépendamment de sa force vive d'ensemble ou *extérieure*, d'une force vive *intérieure*, à laquelle correspond une certaine quantité U, de travail ou d'énergie intérieurs. Dès lors, si Q est la quantité de chaleur utilement transformée en travail communiquée au corps fonctionnant dans une machine, depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_1, si on

désigne par $\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$, $\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2$, le terme des forces vives dues aux mouvements apparents, et par U_0, U_1, l'énergie intérieure des corps composant la machine, on pourra écrire:

$$U_1 - U_0 + \frac{1}{2}\Sigma mv_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = QE + \int_{t_0}^{t_1} [\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)]\, dt$$

Et, si le mouvement est périodique, c'est-à-dire si la force vive apparente repasse, ainsi que l'énergie intérieure, par les mêmes valeurs, on aura, en appliquant l'équation à la durée d'une période:

$$U_1 = U_0$$

$$\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$$

Si, en outre, il n'existe pas de forces motrices extérieures,

$$\Sigma \tau_m = o$$

et l'équation donne

$$\int_{t_0}^{t_1} \Sigma \tau_u\, dt = QE - \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \tau_r\, dt$$

Le travail utile recueilli au moyen d'une machine semblable, est égal au travail QE, communiqué sous forme de chaleur, diminué du travail employé à vaincre les résistances passives.

Toute machine thermique peut être étudiée au moyen de l'équation ordinaire du travail, dans laquelle on introduit, comme travail moteur, la quantité QE, correspondant à la chaleur réellement transformée en travail.

19. — *Rendement calorifique, rendement organique.* — La quantité de chaleur Q n'est pas celle qui est dépensée; car nous verrons (3e fascicule), que le fonctionnement de toute machine thermique comprend nécessairement une dépense de chaleur Q'', communiquée à un fluide travailleur, lequel en rejette une partie Q' ne pouvant plus servir à la production du travail.

On a donc $$Q = Q'' - Q'.$$

Le rapport de la quantité de chaleur utilisée à la quantité dépensee se nomme *rendement calorifique*, il a pour expression :

$$\rho = \frac{Q'' - Q'}{Q''}$$

L'étude de ce rendement fait l'objet de la théorie des machines thermiques; lorsqu'il est connu, on peut déterminer Q en fonction de la chaleur dépensée

$$Q = Q'' - Q' = \rho\, Q''$$

Le *rendement organique* doit être envisagé comme au numéro 9, sa valeur est :

$$u = 1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \Sigma\, \tau_r\, dt}{QE}$$

Pour les machines qui font l'objet du § I, et parmi lesquelles on peut citer les moteurs hydrauliques, les moulins à vent, etc., il n'y a lieu de considérer que cette dernière forme de rendement ; les moteurs peuvent avoir un rendement thermique très faible, tout en ayant un rendement organique élevé ; les comparaisons que l'on a faites parfois entre le rendement *thermique* des machines à vapeur et le rendement *organique* des moteurs hydrauliques, ne pouvaient manquer d'entrainer les inventeurs dans une voie fausse.

L'étude de ρ, ou rendement calorifique, fait l'objet des applications de la Thermodynamique ; pour la recherche de u, il suffit, dans toutes les machines, de pouvoir apprécier les travaux des résistances passives, c'est cette détermination qui fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Etude des résistances passives.

Les résistances passives (7) comprennent principalement :

1° Le frottement des solides ;

2° Le frottement des solides immergés dans un liquide qui sera examiné au § II de ce chapitre ; cette résistance est de la même nature que celle qui se produit dans le cas où un liquide est en mouvement contre une paroi fixe ou à l'intérieur d'un tuyau ;

3° La résistance au roulement ;

4° La raideur, ou manque de flexibilité des cordes, courroies, etc., passant sur des poulies ou des tambours d'enroulement ;

5° Le travail absorbé par les chocs et les vibrations ;

6° Le frottement de l'air sur les pièces en mouvement.

Cette dernière résistance est rarement assez grande pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte, si ce n'est dans des cas spéciaux, tels par exemple que le fonctionnement des ventilateurs, la locomotion à grande vitesse ; on peut aussi avoir à examiner l'effet dû au choc, la question est analogue à celle du mouvement des projectiles [1].

§ I.

DU FROTTEMENT DES SOLIDES.

20. — L'expérience montre qu'un corps, soumis à une force oblique par rapport à la surface d'appui, peut néanmoins rester en équilibre, ce qui ne pourrait avoir lieu si la réaction de l'appui était normale à la surface ; la résistance au glissement est la composante tangentielle de la réaction.

Cette résistance est nulle lorsque la force sollicitante est normale à la

1. Voir le mémoire de O. T. Crosby.— Engineering 1890, 1er sem. p. 663.

surface de contact, elle augmente au fur et à mesure que la force s'écarte de la normale, et atteint bientôt une limite à partir de laquelle le glissement se produit. Lorsqu'il y a mouvement de deux pièces l'une sur l'autre, cette limite est toujours atteinte, et l'expérience permet de la déterminer; c'est cette valeur *limite* de la résistance au glissement, qui a plus particulièrement reçu le nom de *frottement*.

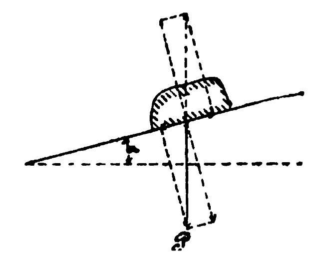


Fig. 11

Ainsi, un corps pesant, (fig. 11), appuyé sur un plan incliné, s'y tient en équilibre pour des valeurs de α modérées. La composante P sin α du poids P, est équilibrée par la composante tangentielle de la réaction du plan.

Lorsque l'inclinaison α dépasse une certaine limite (fig. 12), la résistance au glissement conserve sa valeur constante, qui est le frottement F; la résultante des forces qui agissent sur le corps, en y comprenant la réaction du plan, est P sin α — F, et est dirigée parallèlement au plan, c'est cette force qui produit le mouvement accéléré du corps.

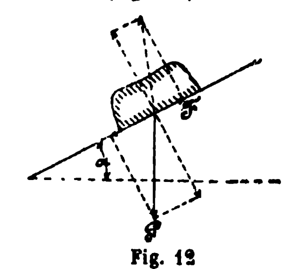


Fig. 12

21. — *Lois du frottement.* — C'est à Amontons [1] que l'on doit les premières recherches expérimentales sur ce sujet; elles établissent que F ne change pas avec l'étendue des surfaces en contact, mais conserve une valeur proportionnelle à la composante normale, N, de la réaction.

Coulomb reprit, en 1782, les expériences d'Amontons, qu'il compléta; le procédé qu'il employait consistait à observer la loi du mouvement du corps appuyé, pour différentes valeurs de la force sollicitante extérieure, et pour diverses charges.

Dans le cas du plan incliné (fig. 12), si v est la vitesse à l'instant t, on a évidemment :

$$F = P \sin \alpha - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$$

La connaissance de la loi du mouvement permet de trouver F.

Coulomb a formulé les lois suivantes :

1. Les travaux de ce physicien datent de deux siècles.

1° Pour des corps donnés, le frottement est proportionnel à la pression normale;

2° Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact;

3° Il est indépendant de la vitesse. Il résulte de ces lois; que le frottement ne dépend pas de la pression par unité de surface, mais seulement de la force normale totale. L'étendue plus ou moins grande que l'on donne aux surfaces de contact ne peut donc diminuer le frottement d'une manière directe, mais elle peut avoir pour effet de favoriser le graissage, ou d'empêcher l'arrachement superficiel des corps.

Le petit nombre d'observations de temps et d'espace parcouru que l'on peut faire dans chaque expérience, rend le procédé de Coulomb très incertain. Morin l'a repris, en enregistrant par un diagramme automatique la loi de l'espace en fonction du temps [1]. Les résultats trouvés par Morin pour un grand nombre de surfaces, à l'état sec, ou graissées, confirment les lois de Coulomb, mais elles ont été trop généralisées. Les vitesses des expériences de Morin n'ont pas dépassé 3m,50 par seconde; la pression a varié de 0 kg. 05 à 3 kilos par centimètre carré, c'est-à-dire que les vitesses, de même que les pressions étaient très faibles; on trouve en effet, dans la pratique moderne, des tourillons et des pivots vingt fois plus chargés; dans le cas des roues enrayées par les freins des chemins de fer, la vitesse peut atteindre 30 mètres par neconde. Des expériences plus récentes ont démontré que les lois ordisaires du frottement ne s'appliquent pas à ces cas extrêmes.

22. — *Frottement au départ.* — Coulomb avait déjà remarqué, et ce fait a été vérifié par Morin, que le frottement au départ est plus grand, mais qu'il suffit d'un choc léger pour déterminer la mise en train, et donner au frottement sa valeur du mouvement. Plus récemment, Fleeming Jenkin a trouvé, en expérimentant à des vitesses très faibles, que le frottement décroit progressivement et non brusquement, lorsque l'on passe de l'état de repos à des vitesses graduellement croissantes.

23. — *Expression analytique des deux premières lois du frottement.* Ces lois indiquent que le rapport

$$f = \frac{F}{N}$$

1. Morin, *Leçons de mécanique pratique.*
Sonnet. Dictionnaire des mathématiques appliquées. Art. frottement.

a une valeur indépendante de l'étendue des surfaces ; le coefficient f est donc caractéristique de l'état des surfaces seulement, on le nomme coefficient de frottement.

On a, figure 13 ;

$$tg\,\varphi = \frac{F}{N}$$

donc

$$f = tg\,\varphi.$$

Fig. 13

On a aussi :

$$F = R \sin \varphi$$

ou :

$$F = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R$$

Le coefficient constant, $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, ou $\sin \varphi$, se désigne ordinairement par f'.

On a donc, pour calculer F, l'une ou l'autre des relations :

$$F = f N$$
$$F = f' R$$

La table I donne quelques unes des valeurs trouvées par Morin pour les cas usuels.

Pour les tourillons, où la surface de contact change à chaque instant, le coefficient a une valeur différente, surtout lorsque le graissage est abondant.

Rennie a déterminé quelques coefficients du frottement au repos pour des pressions croissantes et beaucoup plus élevées (Table II); les métaux étaient d'abord graissés, puis essuyés, c'est-à-dire que les surfaces étaient à peu près à l'état sec; il a trouvé que f conserve une valeur constante entre des limites très étendues, mais qu'il s'élève au fur et à mesure qu'on se rapproche du grippement.

Table I. — *Coefficients de frottement d'après Morin.*

NATURE DES SURFACES FROTTANTES	ÉTAT DES SURFACES	*f* AU DÉPART	*f* PENDANT le mouvement	*f* POUR DES TOURBILLONS GRAISSÉS
Fonte sur fonte ou sur bronze. . .	onctueuses	0.16	0.15	0.054
Fer forgé sur fonte ou sur bronze. .	sèches	0.19	0.18	»
» » » . . .	graissées	»	»	0.054
Fer forgé sur fer forgé	onctueuses	0.13	»	»
Bronze sur fer forgé.	onctueuses	»	0.16	»
Fonte sur bois de gaïac	graissées	»	»	0.09
Courroie en cuir sur tambour en bois .	sèches	0.47	0.27	»
Corde en chanvre sur chêne.	sèches	0.80	0.52	»
Courroie en cuir sur fonte	sèches	0.28	»	»
Garnitures en cuir des pistons. . . .	graissées	0.12	»	»

Table II. — *Coefficients de frottement au repos d'après Rennie.*

PRESSION PAR CENTIMÈTRE CARRÉ	FER SUR FER	FONTE SUR FER	ACIER SUR FONTE	LAITON SUR FONTE
8k79	0.140	0.174	0.166	0.157
13.08	0.250	0.275	0.300	0.225
15.75	0.271	0.292	0.333	0.219
20.95	0.297	0.329	0.344	0.211
26.22	0.350	0.351	0.351	0.206
31.50	0.395	0.365	0.354	0.208
36.77	0.409	0.366	0.357	0.223
42.18	grippement	0.367	0.359	0.234
47.25		0.376	0.403	0.233
55.12		grippement	grippement	0.232

24. — *Frottement des corps abondamment lubrifiés.* — Il est probable que les lois du frottement ne sont sensiblement exactes que pour des

surfaces à l'état sec entre certaines limites de pression et de vitesse. L'interposition d'un lubrifiant a pour effet de substituer au glissement des solides l'un sur l'autre, celui des deux corps sur la matière employée au graissage. Très souvent, le lubrifiant est liquide, or, le frottement des liquides sur les solides est indépendant de la pression, tandis qu'il est proportionnel à la surface, et varie avec la vitesse. D'une manière générale, si on désigne par :

S la surface de contact,
p, la pression par unité de surface,
K, un certain coefficient,
v, la vitesse,

on a pour le frottement du liquide sur la surface S du solide :

$$F = KS\,\psi(v)$$

et pour la pression normale :

$$N = pS$$

d'où pour le coefficient de frottement d'un liquide sur un solide :

$$f = \frac{F}{N} = K.\frac{\psi(v)}{p}$$

le coefficient varie donc avec une certaine fonction de la vitesse, et en raison inverse de la pression.

Lorsque deux pièces solides en mouvement relatif sont séparées par une couche de lubrifiant, le phénomène est très complexe, et le frottement doit dépendre de la viscosité du corps qui sert au graissage et du frottement de ce corps avec chacune des surfaces solides; les lois du frottement des corps lubrifiés ne sont donc pas aussi simples que celles d'un liquide sur un solide ; aussi, Hirn [1] a trouvé, qu'avec des surfaces graissées, *le coefficient de frottement, dans les cas ordinaires, est en raison directe de la vitesse, et en raison inverse de la racine carrée de la pression par unité de surface.* Lorsque les pressions sont extrêmement faibles, l'air peut agir comme lubrifiant, et le coefficient descend jusqu'à $\frac{1}{10\,000}$; enfin, la température, en modifiant la viscosité, exerce une influence sur le coefficient.

Dans le cas qui nous occupe, le frottement dépend de la nature et de

1. Ces recherches sont rappelées dans le *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse 1889, p. 449.*

l'abondance du lubrifiant, plus encore que des métaux en contact, il peut être considéré comme étant la somme de deux efforts : l'un employé à vaincre la cohésion de la couche ; l'autre, à produire le glissement des surfaces solides sur le lubrifiant; la cohésion du lubrifiant peut devenir la cause prépondérante du frottement, dans tous les cas où la pression normale par unité de surface est assez faible pour que le corps employé au graissage puisse subsister entre les surfaces sous une épaisseur sensible ; aussi les graisses consistantes, employées pour les tourillons chargés, ne peuvent servir au graissage des mécanismes légers ; l'horlogerie emploie, pour cette raison, des huiles d'une fluidité extrême ; l'emploi des graisses semi fluides obtenues par le traitement des huiles minérales, qui s'est substitué partout à celui des huiles ordinaires pour les coussinets fortement chargés, a complètement échoué pour les mécaniques de filatures ; l'épaississement des huiles par le froid, exerce, dans certains ateliers, une grande influence sur la dépense de force motrice à dépenser lors de la reprise du travail après un arrêt prolongé.

25. — M. Petroff[1] a établi analytiquement la formule suivante donnant le coefficient de frottement en se basant sur les propriétés de cohésion du lubrifiant, et sur son adhésion avec les surfaces :

$$f = \frac{\mu v}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}\right) p}$$

dans laquelle :

f est le coefficient de frottement ;

μ, une fonction de la viscosité ou coefficient intérieur du lubrifiant ;

v, la vitesse avec laquelle les surfaces se déplacent ;

ε, l'épaisseur de la couche d'huile ;

λ_1 et λ_2, les coefficients de frottement extérieurs, c'est-à-dire du lubrifiant avec chacune des surfaces ;

p, la pression par unité de surface.

On conçoit, d'après cette formule, que le coefficient de frottement entre des pièces abondamment graissées échappe à toute loi simple ; toutefois elle est confirmée dans une certaine mesure par les résultats de Hirn (24).

1. *Neue Theorie der Reibung* von N. Petroff, traduit du russe par L. Wurzel, Leipzig-Voss. 1887.

M. Thurston [1] donne, comme résultat de ses recherches expérimentales, la formule

$$f = a \frac{\sqrt[5]{v}}{\sqrt{p}}$$

Ces diverses valeurs indiquent une variation, dans le même sens, du coefficient de frottement avec la vitesse et en raison inverse de la pression.

26. — *Expériences de M. Beauchamp-Tower* [2]. — Ces expériences ont été entreprises dans le but de comparer diverses huiles, elles ont été faites au moyen d'un coussinet en bronze s'appuyant sur un tourillon en acier, elles semblent démontrer contrairement à ce qui a été établi aux numéros 22 et 23, que le coefficient de frottement est indépendant de la vitesse, au moins entre des limites variant dans le rapport de 1 à 10 ; la température était maintenue à 32 degrés centigrades, la pression par centimètre carré du plan diamétral du tourillon était variable, et son influence sur le coefficient ressort des chiffres ci-dessous :

PRESSION	COEFFICIENT
31	0,00132
23	0,00168
14,8	0,00247
6,2	0,0044

Toutefois, le coefficient de frottement est souvent pris, par les savants anglais, dans un sens restreint, il est obtenu en divisant l'effort F, qui tend à faire tourner le coussinet dans le sens du mouvement (fig. 14), par la pression normale N qui le sollicite, comme s'il s'agissait d'une surface plane, ou comme si le coussinet reposait suivant une seule génératrice, tandis qu'il devrait être déterminé en appliquant à chaque élément de l'arc de contact une composante de la pression normale.

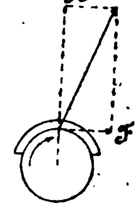


Fig. 14

A part cette restriction, les recherches de M. Beauchamp-Tower ont eu pour résultat de déterminer la loi de répartition des pressions, sur la face de contact du coussinet.

1. *Etude sur le frottement*, etc. par Robert H. Thurston. Traduction Paris-Bernard. 1887.

2. *Engineering* 1883. 2e sem. p. 451 ; 1885 1er sem. p. 458. Remarque de M. Hele Shaw.

Des canaux (fig. 15), pratiqués suivant les génératrices, aboutissent sur la face intérieure, et débouchent en divers points de la surface

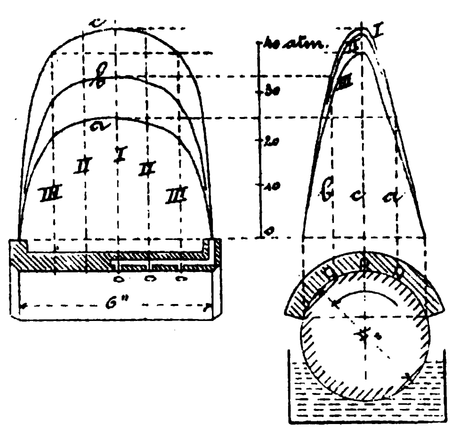


Fig. 15

extérieurement ils sont en relation avec un manomètre qui permet de lire la pression.

La loi de variation de la pression a été représentée par des courbes, dont la hauteur dépend de la charge qui pèse sur le coussinet ; pour des huiles minérales lourdes, la pression s'est élevée à plus de 40 atmosphères.

Le mode d'application du lubrifiant paraît avoir une grande influence sur le phénomène ; celui qui a donné les courbes de la figure 15 consiste à faire tourner la partie inférieure du tourillon dans le bain d'huile [1].

On doit admettre, comme bien établi, que l'huile épaisse peut supporter une pression de 40 kilogrammes par centimètre carré sans être expulsée latéralement, bien que le tourillon ne présente aucune saillie qui soit de nature à la retenir. La pression est la plus grande dans la section située au milieu de la longueur, elle décroît très rapidement près des extrémités ; dans chaque section droite, elle diminue près des bords, mais d'une manière inégale par rapport au milieu de l'arc, c'est le sens du mouvement qui détermine cette inégalité.

1. Les autres modes d'application essayés consistaient encore en un siphon à mèche, ou godet graisseur ordinaire, et en un tampon imbibé placé sous le tourillon, ces deux derniers ont donné des coefficients de frottement de 6 à 7 fois plus élevés que lorsque l'arbre baigne dans l'huile. Les expériences de M. Goodmann au Yorkshire College concluent dans le même sens.

27. — *Expériences de M. Woodbury à Boston* (1). — Ces expériences ont porté sur une huile minérale sous différentes charges, mais la machine employée était formée de deux disques horizontaux tournant l'un sur l'autre, entre lesquels on interposait le lubrifiant ; la vitesse est donc variable depuis le centre, où elle est nulle, jusqu'à la périphérie, où elle atteint $1^m,50$ par seconde ; le disque inférieur est commandé par une courroie, le moment nécessaire pour équilibrer les frottements sur le disque supérieur est mesuré au moyen d'un dynamomètre, le coefficient de frottement est déterminé par la formule des pivots (48).

Les résultats traduits en diagramme (fig. 16 et 17), accusent nette-

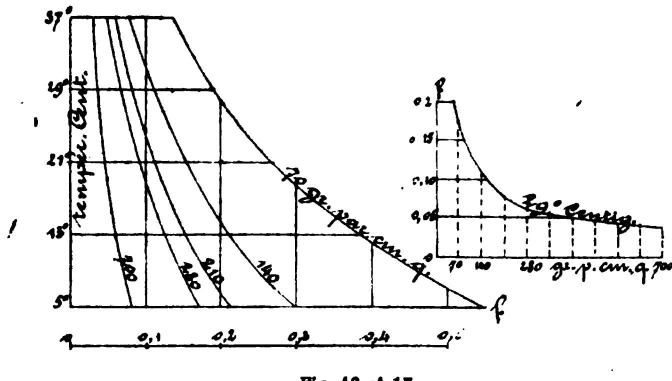


Fig. 16 et 17

ment la diminution du coefficient lorsque la pression augmente, la température restant constante ; la température exerce un effet analogue, mais spécial au lubrifiant qui a servi à l'essai.

28. — *Frottement à sec sous de grandes pressions, à vitesse variable* (2). — Le frottement à sec a fait l'objet de recherches approfondies, surtout au point de vue du fonctionnement des freins continus. Poirée et Bochet, au chemin de fer de Paris-Lyon, avaient constaté qu'à des vitesses variant depuis 80 jusqu'à 22 kilomètres à l'heure (22 mètres à $6^m,20$ par seconde), le coefficient de frottement des roues enrayées sur les rails secs augmente de 0,136 juqu'à 0,20. MM. Westinghouse et le capitaine Douglas Galton ont trouvé, au moyen d'appareils enregistreurs, sur les lignes du London-Brighton Railway, que le frottement entre les sabots

1. *Engineering*. - 1884 - 2e sem. p. 532.
2. *Engineering*, 1878, 2e sem. pp. 153, 386, 395 et 399.

de frein et les bandages des roues non enrayées, ainsi que celui des roues enrayées sur les rails, augmentent lorsque la vitesse diminue; ils donnent de leurs expériences le tableau ci-dessous, dont les fig. 18,

Expériences de MM. Westinghouse et Douglas Galton.

VITESSES PAR SECONDE	COEFFICIENT DE FROTTEMENT			
	après 3 secondes d'application du frein	après 5 à 7 sec	après 12 à 16 sec	après 24 à 25 sec
SABOTS EN FONTE, BANDAGES EN ACIER				
27m00	0.062	0.054	0.048	0.043
22.30	0.100	0.070	0.056	—
20.00	0.125	—	—	—
17.90	0.134	0.100	0.080	—
13.50	0.184	0.111	0.098	—
9.00	0.205	0.175	0.128	—
4.50	0.320	0.209	—	—
au-dessous de 2.25	0.360	—	—	—
SABOTS EN FER, BANDAGES EN ACIER				
21.00	0.110	—	—	
14.00	0.129	0.110	0.099	
8.00	0.170			
ROUES ENRAYÉES, BANDAGES EN ACIER SUR RAILS EN ACIER				
22.50	0.040	—	—	
20.00	0.051	—	—	
17.00	0.057	0.044	0.044	
11.20	0.080	0.074	—	
6.70	0.087	—	—	
4.50	0.110	—	—	

19 et 20 sont la représentation graphique. On remarque également la diminution du coefficient avec la durée d'application des corps frottants,

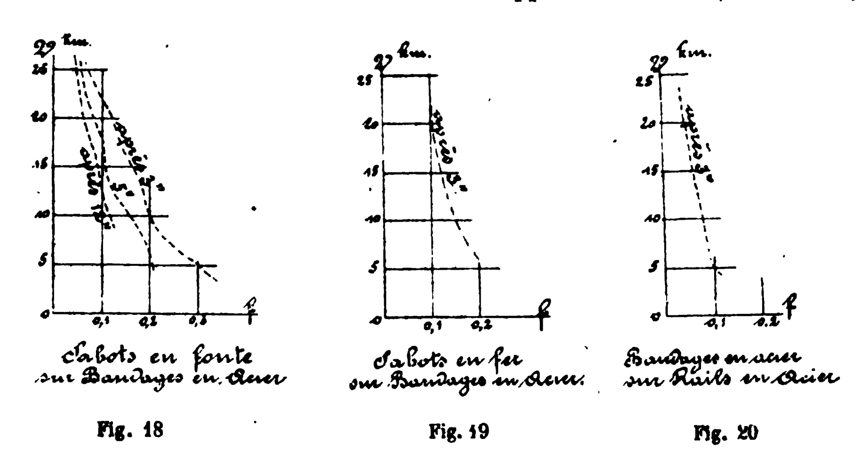


Fig. 18 Fig. 19 Fig. 20

soit que les surfaces s'altèrent en s'usant, soit que la limaille provenant de l'usure produise un effet lubrifiant

29. — *Observation importante sur les procédés employés pour déterminer le coefficient de frottement, et conclusions.* — Le seul procédé qui conduise à des résultats précis est celui employé par Morin (21) ; les surfaces portantes sont assez rigides pour qu'on puisse supposer la charge uniformément répartie ; on obtient le frottement par un calcul sommaire pour chaque vitesse, peu importe qu'il soit constant ou variable. Dans l'application, la difficulté consiste à réaliser un mouvement ayant assez de durée et d'amplitude pour fournir des résultats exacts.

Malheureusement, les pressions pour lesquelles Morin a opéré sont très faibles, de même que les vitesses, et, bien que ses tables renferment des coefficients pour quelques surfaces graissées, aucune de ses expériences n'a été faite dans des conditions semblables à celles où se trouvent les pièces de machines, car celles-ci ne peuvent fonctionner qu'à la condition d'être abondamment lubrifiées ; aussi, les lois du frottement (21), et les coefficients de Morin et de Rennie semblent devoir convenir à certains problèmes où le frottement au repos intervient, comme dans les constructions fixes.

Lorsqu'on se sert de deux disques appuyés l'un sur l'autre (procédé de Mac-Naught, Woodbury, etc.), la vitesse est variable avec le rayon

relatif à chaque élément; les coefficients sont déterminés en mesurant le moment résistant dû aux frottements sur toute la surface commune; ce moment, égal à l'expression tirée de la formule des pivots (48), permet de déterminer *f*, mais cette formule suppose que le coefficient cherché est indépendant de la vitesse ; le résultat trouvé ne serait donc exact que dans cette hypothèse, or toutes les expériences, si l'on en excepte celles de M. Beauchamp-Tower (26), semblent démontrer que le coefficient augmente avec la vitesse.

Rankine a évalué le temps que met à s'arrêter un système tournant, lancé à une certaine vitesse, puis abandonné à lui-même; comme il n'est soumis alors qu'au travail du frottement sur ses tourillons, si le coefficient cherché est indépendant de la vitesse, le mouvement est uniformément ralenti, et le travail du frottement peut s'évaluer facilement d'après la force vive connue au commencement de l'expérience. Si au contraire, *f* dépend de la vitesse, cette expérience ne peut donner de résultats précis que si l'on enregistre la loi de décroissance de la vitesse en fonction du temps.

Enfin, plusieurs expérimentateurs, MM. Robert Thurston, Beauchamp-Tower, ont envisagé des tourillons se mouvant sous des pressions et à des vitesses réglées pour chaque expérience, mais variables d'une expérience à l'autre; ils ont trouvé des coefficients qui descendent parfois au centième de ceux trouvés par Morin pour des surfaces planes glissant l'une sur l'autre, et au trentième de ceux attribués par ce savant aux tourillons graissés.

Il importe de laisser à la plupart des expériences faites sur les tourillons leur véritable signification [1], elles ne donnent pas le *coefficient de frottement* au sens que les auteurs classiques (Coulomb, Navier, Poncelet, Morin) ont attribué à ce mot, car la pression normale par unité de surface varie d'un point à l'autre du coussinet (26); alors même que le mode de répartition serait connu, le coefficient *f* ne peut être déterminé s'il dépend de la pression suivant une fonction plus ou moins compliquée. Le coefficient serait, dans tous les cas, variable d'un point à l'autre de la surface, tandis que les auteurs admettent la notion d'un seul coefficient, tiré de l'expérience, en divisant la valeur de l'effort tangentiel par la pression normale, comme si le contact n'avait lieu que suivant une génératrice.

1. Voir au n° 162 l'appareil de Thurston.

Dans les calculs qui ont pour objet l'évaluation des travaux absorbés par les résistances passives, il convient d'exagérer la valeur numérique des coefficients de frottement, afin d'éviter tout mécompte ; le graissage n'est pas toujours opéré avec tout le soin nécessaire, et surtout les erreurs de montage, les mouvements légers dans les massifs de fondation des machines, peuvent donner aux pressions des valeurs plus grandes que celles qui résultent de la décomposition des forces agissant régulièrement.

30. — *Echauffement produit par le frottement.* — Le travail correspondant au frottement est équivalent au travail d'arrachement ou d'usure des surfaces frottantes, augmenté du travail correspondant au dégagement de chaleur qui accompagne le phénomène. Ce dégagement de chaleur peut avoir pour effet d'échauffer les pièces, et de rendre leurs surfaces impropres à supporter le frottement, il est alors nécessaire de les refroidir. Généralement, lorsque la vitesse et la charge sont modérées, l'accroissement de température est limité, parce que la chaleur s'écoule par conductibilité, par contact avec l'air ambiant, et surtout par vaporisation d'une légère partie du lubrifiant; ce n'est que dans des cas spéciaux qu'il est nécessaire de refroidir les organes par arrosage à l'eau froide.

Le travail d'usure des surfaces et la chaleur produite par le frottement varient dans le même sens, le premier effet du lubrifiant est de diminuer le travail d'usure, et par conséquent la chaleur produite; par une action subséquente, due, non à ses propriétés lubrifiantes, mais à son état liquide, la matière employée au graissage limite encore l'élévation de température.

31. — *Lubrifiants.* — On emploie comme lubrifiants les matières liquides ou semi-fluides, parfois même des corps solides onctueux, comme le talc et le graphite [1].

Les matières liquides employées sont, surtout, les huiles animales (de baleine, de pied de bœuf, de lard, etc.), les huiles végétales (d'œillette, de colza, d'olive, etc,) et les huiles minérales plus ou moins lourdes qui distillent au-delà de 300°.

La graisse consistante, qui jouit aujourd'hui d'une grande vogue, est un produit à base de vaseline, qui fond par une légère augmentation

1. Thurston - ouvrage cité.

de température des coussinets, et fonctionne dès lors comme les huiles liquides.

Les qualités des huiles dépendent:

1° De leur pouvoir réducteur du coefficient de frottement.

2° De leur viscosité lorsqu'il s'agit de grandes pressions; il y a lieu de remarquer que cette propriété ne dépend pas nécessairement du poids spécifique.

3° De leur résistance à l'oxydation, les huiles végétales surtout sont siccatives à divers degrés, l'huile de lin doit être rejetée.

4° De l'absence d'action chimique sur le métal, les huiles minérales sont exemptes de ce défaut, les autres huiles peuvent être fortement acides, soit qu'elles n'aient pas été bien débarrassées de l'acide sulfurique qui a servi à les raffiner, soit qu'elles renferment des acides gras; celles qui en sont purifiées se nomment huiles neutres, et sont recherchées pour le graissage.

5° De l'élévation du point d'ébullition et d'inflammation.

6° De l'abaissement du point auquel elles se congèlent.

L'expérience a démontré que les acides gras libres sont impropres au graissage, et qu'ils détériorent les surfaces; les huiles acides, après avoir servi au graissage, renferment à l'analyse une proportion notable de cuivre, provenant du bronze des coussinets; il importe donc de ne faire usage que des huiles neutres.

Pour les organes baignés par la vapeur à haute pression, on n'emploie plus que les huiles minérales; les huiles végétales et les corps gras d'origine animale, ont sous l'action de la vapeur, la propriété de se dédoubler en mettant en liberté leur acide gras, qui attaque les parois métalliques.

32. — *Mode d'application du graissage.* — Le mode d'application de la matière lubrifiante à une grande influence sur le frottement. D'après les expériences de Beauchamp-Tower et de Goodmann (26), les paliers graisseurs dans lesquels l'arbre tourne dans un bain d'huile, seraient préférables à tout autre système, le graissage au moyen d'un godet à mèche est dispendieux et peu efficace.

Pour un coussinet très chargé et dont la pression s'exerce toujours

dans le même sens, il est nécessaire de pratiquer des canaux pour permettre à l'huile d'arriver en tous les points de la surface de contact.

On a remarqué aussi que les coussinets épousant complètement la demi-circonférence d'un tourillon s'échauffent beaucoup plus vite que ceux qui sont évidés latéralement, et qu'on emploie couramment pour les fusées des essieux de wagons (fig. 21): dans ces derniers la projection *ab*, de l'arc de contact, descend jusqu'à 0,7 du diamètre *d*, du tourillon; certains constructeurs pratiquent un évidement analogue, quoique moins prononcé, dans les coussinets des transmissions; quelquefois, l'évidement est pratiqué dans le pivot, lorsque le mouvement de rotation n'a qu'une amplitude faible, il en est ainsi dans les articulations de pied de bielles des machines de Porter-Allen (fig. 22); l'évidement a encore pour but, ici, de prévenir l'ovalisation.

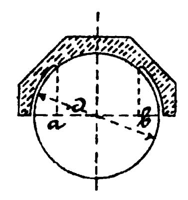


Fig. 21

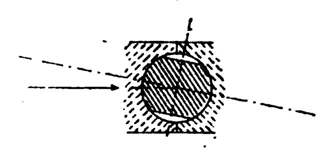


Fig. 22

§ II.

DU FROTTEMENT DES LIQUIDES SUR LES SOLIDES.

33. — Le frottement de l'eau sur des parois solides de diverse nature a fait l'objet des recherches des hydrauliciens; sa connaissance est indispensable à l'étude du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts (1). Il est essentiel de remarquer toutefois, que les expressions admises pour mesurer soit la perte de charge, soit la perte de pression dans les tuyaux, ne permettent pas de trouver l'action s'exerçant réellement entre le liquide et la paroi, car ces expressions tiennent compte d'un phénomène plus complexe, celui du frottement des couches successives l'une sur l'autre, depuis la paroi jusqu'au filet le moins retardé par leur action.

Le frottement du liquide sur la paroi, tel qu'il s'exerce sur certaines

1. Voir pour ces recherches le *Traité d'Hydraulique* de Bresse et la bibliographie fort complète indiquée par M. Haton de la Goupillière, *Cours de Machines* T I. 71.

pièces de machines, mobiles dans l'eau [1], ou sur la carène des navires, a surtout été étudié en vue de la propulsion; les expériences les plus anciennes que l'on connaisse sur ce sujet sont celles entreprises à Londres par le colonel Beaufoy à la fin du siècle dernier; le vice-amiral Bourgois en a tiré la formule

$$R = (0{,}05\ V + 0{,}11\ V^2)\ S$$

R étant la résistance, en kilogrammes,
V la vitesse, en mètres par seconde,
S la surface mouillée, en mètres carrés.

Beaufoy n'avait opéré que sur des surfaces en bois, et la formule ci-dessus se rapporte à du bois raboté et peint.

C'est à W. Froude que l'on doit les expériences les plus précises sur le frottement de l'eau en mouvement sur diverses surfaces; le frottement par mètre carré est donné par:

$$R = ASV^n$$

A étant un coefficient qui diminue peu à peu lorsque la surface mouillée est plus longue dans le sens de la vitesse de l'eau, et dont la valeur est donnée par le tableau.

S est la surface en mètres carrés.

n augmente de 1,83 à 2,06 en passant d'une surface très unie à une surface rugueuse.

Expériences de W. Froude

NATURE DE LA SURFACE	VALEURS DE A, SURFACE AYANT :		
	15m00 de long	2m44 de long	0m61 de long
Enduite de vernis	0.122	0.158	0 200
Feuille d'étain	0.120	0.135	0.146
Calicot	0.231	0.305	0.424
Sable fin	0.197	0.284	0.394
Sable moyen	0.238	0.304	0.438

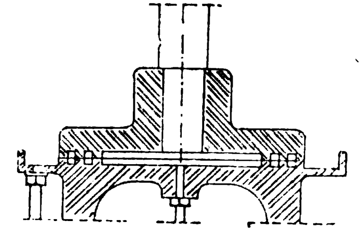
1. Voir notre 7e Fascicule, machines servant à déplacer les fluides n° 130. Paris. — E. Bernard.

Enfin, M. Unwin [1], au moyen d'un appareil fort ingénieux (50), a trouvé, pour des disques tournant dans l'eau, que la formule de Froude se vérifie, le coefficient A et l'exposant *n* prennent les valeurs suivantes, lorsque l'on transforme les mesures anglaises en mesures métriques:

Expériences de M. Unwin

NATURE DE LA SURFACE	A	*n*
Bronze poli.	0.143	1.85
Fonte peinte	0.153	1.86
Fonte peinte et vernie.	0.125	1.94
Fonte.	0.112	2.00
Surface couverte de sable fin. . . .	0.169	2.05
Surface couverte de gros sable . . .	0.415	1.91

34. — Le frottement entre les liquides et les solides ne dépendant pas de la pression, il est possible, dans certains cas, de réduire notablement la résistance au mouvement au moyen de dispositions inventées par Girard, et qui ont pour but de substituer le frottement du liquide sur solide, à celui des solides entre eux; on y parvient en maintenant, entre les faces en contact, une nappe d'eau très mince, refoulée sous pression. On a pu, de cette manière, rendre possible le fonctionnement de lourds arbres verticaux [2] au moyen du pivot hydraulique (fig. 23); l'arbre porte à sa base un plateau d'une certaine étendue, reposant sur un plateau fixe, qui reçoit à son centre l'eau refoulée par une petite pompe [3]; on pourrait évaluer le frottement en se servant des coefficients de M. Unwin, au moyen de la méthode qui sera exposée plus loin (48).


Fig. 23

1. *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers.* Vol. LXXX.
2. Les étages des filatures étaient commandés autrefois par une ligne d'arbres verticale donnant le mouvement aux arbres secondaires par des roues coniques; le poids de l'arbre vertical chargé de ses nombreuses roues de transmission étant fort considérable, le fonctionnement du pivot était souvent défectueux; les transmissions sont aujourd'hui disposées autrement.
3. Pour le *Pivot hydraulique de Girard*, V. Armengaud, Vignole des mécaniciens p. 139.

35. — La réduction de résistance obtenue par ce procédé est si considérable, qu'on a songé à l'employer pour éviter la résistance au roulement. Le chemin de fer hydraulique, dont l'idée, reprise récemment, remonte également à Girard, comporte en effet, outre le mode propulseur, un système de patins glissant sur l'eau, remplaçant les roues des véhicules ordinaires.

Des difficultés pratiques presque insurmontables empêcheraient sans doute la réalisation du système en grand, mais on a pu (1) établir une courte ligne d'essai dont le fonctionnement a justifié les prévisions de l'inventeur.

La figure 24 représente les patins de support employés, la face qu

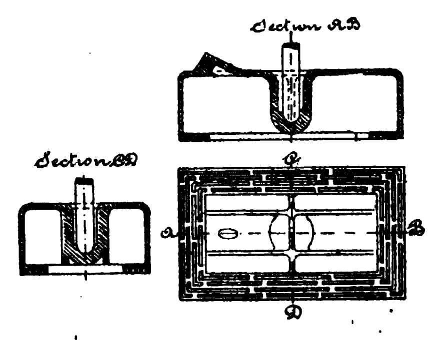


Fig. 24

porte sur le rail plat est rectangulaire, et entourée de cannelures, dont le but est de créer de fortes pertes de charge à la sortie du liquide, c'est-à-dire de diminuer le débit de la fuite, pour une même pression sous le patin; la pression est d'environ 4 kilogrammes par centimètre carré.

Girard a aussi proposé de substituer l'air comprimé à l'eau sous pression; le coefficient de frottement est incomparablement moindre pour l'air que pour l'eau, à égalité de pression, mais le volume beaucoup plus grand, débité pour un même intervalle entre le patin et le rail, serait un obstacle à son emploi.

Il n'est sans doute pas permis d'appliquer à une lame d'eau de moins d'un millimètre d'épaisseur les coefficients de Froude et de Unwin (33), et de nouvelles expériences devraient être entreprises à ce sujet, sinon il serait possible de calculer la résistance à vaincre pour entraîner les

1. Exposition universelle de Paris. *Notice sur le chemin de fer glissant.* Paris. Imp. Cabasson - 1889.

charges sur le chemin de fer glissant; à la pression effective de 4 kilogrammes par centimètre carré, la surface de patin correspondant à une tonne de charge est

$$S = 0^{m^2},025$$

et l'on obtient, pour la résistance à différentes vitesses, dans le cas de la fonte:

V MÈTRES PAR SECONDE	V' KILOMÈTRES A L'HEURE	R^k PAR TONNE DE CHARGE
10	36	0.28
20	72	1.12
30	108	2.52
40	144	4.48

Ces résistances sont, en effet, de beaucoup inférieures à celles qu'opposent au roulement les véhicules les mieux construits, sur les lignes ferrées en bon état.

§ III.

Résistance au roulement.

36. — Cette résistance, qu'on appelle parfois improprement: frottement de roulement, se manifeste à la génératrice de contact de deux pièces qui roulent l'une sur l'autre, et provient de la déformation très légère qui se produit dans le voisinage du point d'appui; ainsi, dans le cas d'un cylindre de poids P, roulant sur un plan (fig. 25), la déformation, tant du cylindre que du plan, occasionne une résistance qui peut être vaincue par l'effort T, parallèle au plan.

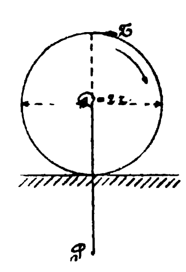


Fig. 25

Les expériences sur la résistance au roulement

sont peu nombreuses. Coulomb à trouvé qu'elle peut être donnée par la formule

$$T = A \frac{P}{D}$$

T et P sont les forces exprimées en kilogrammes, et D est le diamètre du rouleau en mètres ; le coefficient A dépend de la nature des surfaces, les cylindres avaient de 2 à 6 pouces de diamètre, le plan de roulement était en bois de chêne ; A prend les valeurs suivantes :

Rouleau en bois de gaïac. . . . $A = 0.000097$
» en orme . . . . . . $A = 0.00162$

L'équilibre exige que l'on ait (fig. 26),

$$T \times ab = P\delta$$

ou, très approximativement :

$$T = \delta \frac{P}{D} \qquad (1)$$

On voit que le coefficient A, de Coulomb, a pour valeur la distance δ, comprise entre le point d'application, C, de la réaction, et la verticale passant par le centre du rouleau (δ serait ainsi constant pour des rouleaux de divers diamètres, ce qui est peu vraisemblable).

Nous empruntons au *Traité des Mécanismes*, de M. Haton de la Goupillière, les valeurs de δ généralement admises

NATURE		δ, EN MÈTRES
DU ROULEAU	DE LA SURFACE	
fonte	granit uni	0.0010
orme	gaïac dressé	0.0010
orme	chêne dressé	0.0016
fonte	rail saillant	0.0012
jante en fer	chêne brut	0.0102
id.	pavé (au pas)	0.0185
id.	pavé (au trot)	0.0238
id.	empierrement	0.0414
id.	cailloutis neuf	0.0634

37. — Le travail de la force T, pour un déplacement ds, du point de contact, est évidemment :

$$2T\,ds$$

Ce résultat peut être interprété en considérant la résistance au roulement comme une force appliquée au centre, en sens inverse du mouvement, égale à

$$2T, \text{ ou } \delta \frac{P}{r}$$

En appliquant ce résultat à un rouleau en orme, de $0^m,10$ de diamètre on aurait :

$$A = 0.00162$$
$$D = 0.10$$
$$2T = 0.0324\ P$$

Le frottement de glissement serait, d'après Morin :

$$F = 0.38\,P$$

La résistance au roulement est donc de beaucoup inférieure au frottement proprement dit, il en est ainsi dans tous les cas usuels.

Il serait facile du reste, de démontrer que le roulement ne peut avoir lieu que si T est inférieur à F, le mode de sollicitation étant celui de la figure 26, sinon, le glissement se produirait au moment où la force T serait égale à F.

Fig. 26

38. — D'une manière plus générale, si l'on suppose que l'effort de traction X (fig. 27), est appliqué en un point quelconque A, du rouleau, celui-ci, sollicité à la fois par son poids P et par la force X, c'est-à-dire par leur résultante R, ne se mettra à rouler, que si cette force fait, avec la verticale, un angle inférieur à l'angle de frottement, condition qui exige :

$$\frac{\delta}{Ab} < tg\ \varphi$$

ou, très approximativement :

$$\frac{\delta}{Am} <$$

Fig. 27

c'est-à-dire

$$Am > \frac{\delta}{f}$$

39. — On peut supposer aussi que le cylindre est sollicité par une force verticale T' (fig. 28); la réaction du plan est alors verticale, et l'équilibre conduit à l'équation :

$$T' = \delta' \frac{P}{r - \delta'}$$

ou, d'une manière approchée :

$$T' = \delta' \frac{P}{r}$$

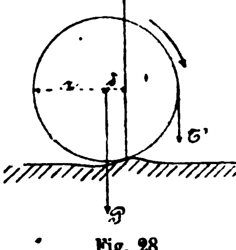


Fig. 28

Le travail de T', pour un déplacement du cylindre, est dans ce cas :

$$T' \, ds$$

les choses se passent donc comme si le cylindre était soumis à une résistance T', agissant dans le plan, en sens contraire du mouvement.

Il convient de remarquer que T' est à peu près double de la valeur T donnée par l'équation (1), car δ' ne saurait différer notablement de δ; il devait en être ainsi, puisque le bras de levier de T' par rapport au centre instantané de rotation, n'est que la moitié de celui de T par rapport au même point.

40. — Les résultats trouvés par Coulomb ne peuvent s'appliquer à tous les cas; il est évident, en effet, que δ n'est pas constant, car, pour un cylindre de rayon inférieur à cette quantité, la réaction passerait en dehors du rouleau; aussi, Dupuit, dans son *Essai sur le tirage des voitures*, qui date de 1837, admet pour δ la valeur :

$$\delta = c\sqrt{r}$$

équation dans laquelle le coefficient c prend les valeurs suivantes :

Bois sur bois.	$c = 0{,}0011$
Fer sur bois humide.	$c = 0.0010$
Fer sur fer	$c = 0.0007$
Roues sur chaussées empierrées.	$c = 0.0300$

On en tire pour la résistance au roulement:

$$2\,T = c\,\frac{P}{\sqrt{r}}$$

La résistance augmenterait donc, non en raison inverse du rayon, mais en raison inverse de la racine carrée de cette quantité.

41. — Enfin, Gerstner [1], prenant comme point de départ la pénétration de la roue dans un milieu élastique, trouve que la résistance est donnée par

$$2T = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3\ P^4}{\mu\ br^2}}$$

μ est un coefficient dépendant de la nature de la surface fixe, b est la largeur de la roue.

Cette valeur de la résistance conduit à admettre:

$$\delta = \frac{r}{P} \times 2T = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3\ Pr}{\mu b}}$$

elle montre l'influence de la largeur des jantes sur la résistance au roulement.

§ IV.

De la raideur des cordes.

42. — Cette résistance particulière se produit au passage de tout lien flexible (corde, courroie, câble métallique) sur une poulie ou un tambour. Les auteurs classiques [2] ont admis que la résistance Q (fig. 29), ne pouvant, par suite de la raideur du lien, être tangente à la circonférence moyenne de la corde enroulée, on a

$$P > Q$$

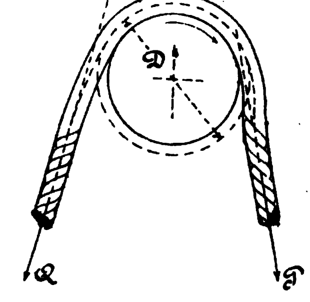


Fig. 29

Si la corde, au contraire, était parfaitement flexible, on aurait:

$$P = Q$$

1. Ruhlmann-Allgemeine Maschinenlehre, Band III.
2. Coulomb, Weisbach.

Coulomb a traduit les résultats de ses expériences sur des cordages en chanvre par la formule :

$$P - Q = \frac{A + BQ}{D}$$

P — Q se nomme la raideur ;

D est le diamètre moyen, mesuré sur l'axe du cordage enroulé ; si on l'exprime en mètres, et qu'on évalue P et Q en kilogrammes, les constantes A et B sont données par le tableau ci-dessous, tiré par Navier des expériences de Coulomb :

Table de Navier.— Cordages en chanvre

NATURE DES CORDAGES	NOMBRE de fils de caret	DIAMÈTRE d du cordage	POIDS par mètre	A	B
Cordes blanches. . . .	30	0.0200	0k2834	0.22246	0.00974
	15	0.0144	0.1448	0.06351	0.00552
	6	0.0090	0.0522	0.01060	0.00238
Cordes goudronnées. . .	30	0.0236	0.3326	0.34960	0.01255
	15	0.0168	0.1632	0.10593	0 00606
	6	0.0096	0.0693	0.02121	0.00260

Lorsque le diamètre d', du cordage, ne se trouve pas dans la table, Navier conseille de prendre le diamètre d qui s'en rapproche le plus, en admettant que les constantes A et B augmentent suivant une certaine puissance du diamètre

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$$

On prend

$\mu = 2$ pour les cordes neuves ;

$\mu = 1.5$ pour les cordes assouplies ;

$\mu = 1$ pour les cordages usés et très flexibles.

Cette loi serait applicable aux cordages blancs, tandis que, pour les cordes goudronnées, il suffit d'admettre que la raideur est proportionnelle au nombre de fils de caret.

Le *moment additionnel* dû à la raideur, est l'excès du moment de P (par rapport au centre de la poulie), sur le moment de Q, cette dernière force étant supposée agir tangentiellement; la valeur de ce moment est donc :

$$P\,\frac{D}{2} - Q\,\frac{D}{2} = \frac{A + BQ}{2}$$

on retrouve souvent cette expression dans les théories de la mécanique appliquée.

43. — Morin, en interprétant les résultats des expériences de Coulomb, a constaté que l'influence du diamètre de la corde n'est pas traduite exactement par les considérations ci-dessus, et a proposé des formules dans lesquelles la grosseur est caractérisée par le nombre de fils de caret.

M. de Longraire [1] fait remarquer que les diverses formules mises en avant pour exprimer la raideur, bien qu'elles ne s'accordent guère, sont tirées des seules expériences de Coulomb; les écarts, parfois considérables, que l'on trouve entre les auteurs, commandent la plus grande circonspection. D'ailleurs, parmi les expériences de Coulomb, il y a lieu de faire un choix; M. de Longraire élimine, notamment, celles qui ont porté sur un diamètre d'enroulement trop faible, comparativement à la grosseur du cordage, il arrive ainsi à une formule simple et pratique, applicable à la fois aux cordages blancs et aux cordages goudronnés, et dont l'accord avec les expériences de Coulomb et les formules de Morin est très satisfaisant; dans notre système de notations, elle s'écrit :

$$P - Q = 0.04\,Q\,\frac{p}{D}$$

p est le poids du cordage par mètre courant, en kilogrammes.

Le moment additionnel dû à la raideur prend la valeur :

$$(P - Q)\,\frac{D}{2} = 0.02\,Qp$$

44. — Pour résoudre les problèmes usuels relatifs aux appareils dans

1. *Mémoires et compte-rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils* 1889.

la composition desquels entrent des cordages, on peut se servir utilement des données suivantes (1) :

$$p = 0.0007 d^2$$

d est le diamètre en millimètres.

Pour les cordes goudronnées

$$p = 0.0006 d^2$$

la charge de rupture pour des cordages ordinaires (2) c'est-à-dire commis en aussières, est

$$R = 5 d^2$$

Il convient, pour le travail courant, de ne pas dépasser le sixième de cette tension. Le chanvre de Manille est notablement plus résistant que le chanvre ordinaire ; le chanvre d'Anjou atteint une résistance de 11 kg. par millimètre carré de section de fil de caret, ce chiffre est réduit de moitié pour certains chanvres goudronnés.

Les câbles spéciaux en chanvre fort des Flandres, fabriqués par la maison Vertongen-Goens, à Termonde, ont donné une résistance atteignant au minimum

$$R = 7 d^2$$

Les câbles de transmission (103) de cette maison répondent aux formules suivantes :

Chanvre de Manille :

$$p = 0.00066 d^2$$
$$R = 6{,}25 d^2$$

Chanvre fort des Flandres :

$$p = 0.000825 d^2$$
$$R = 6{,}25 d^2$$

Les poulies et tambours sur lesquels s'enroulent les cordes doivent avoir, *pour rayon*, au moins 3 ou 4 fois le diamètre de celles-ci. Pour les câbles qui fatiguent beaucoup, et qui sont employés journellement

1. Voir en outre : *Des Ingénieurs Taschenbuch*, von dem Verein Hütte ; ainsi que l'*Aide-Mémoire du constructeur de Navires*, par *Martinenq*. — Paris, E. Bernard.
2. D'après les cahiers des charges des chemins de fer de l'État, en Belgique.

dans les treuils à vapeur, le rayon doit avoir une valeur double ou triple au moins.

Les câbles plats peuvent être considérés, au point de vue de la raideur, comme formés par la réunion de cordages ronds dont le diamètre serait égal à l'épaisseur du câble plat; il est probable que la formule de M. de Longraire s'applique à ce genre de cordages, on pourra donc l'employer, à défaut d'expériences directes.

45. — Il existe très peu d'expériences sur la raideur des câbles métalliques, dont la composition, et par conséquent la flexibilité, varient beaucoup; les données les plus récentes à ce sujet sont celles de M. Murgue [1]. M. G. Leloutre arrive, il est vrai, à déterminer la raideur d'un cordage en fil de fer, mais il procède d'une manière indirecte, dans laquelle il est difficile de faire la part des résistances dues à d'autres causes. Redtenbacher et Grashof se sont aussi occupés de cette question, sans arriver à des résultats concordants. Les chiffres trouvés par M. Murgue (d'accord avec ceux de Grashof), répondent aux formules suivantes :

I. — Câbles en fil de fer

$$P - Q = (2 + 0.0032\ Q)\ \frac{p}{D}$$

II. — Câbles en fil d'acier

$$P - Q = (3{,}50 + 0.0032\ Q)\ \frac{p}{D}$$

III. — Câbles rouillés, en fil d'acier

$$P - Q = (3.00 + 0.0032\ Q)\ \frac{p}{D}$$

IV. — Câbles lubrifiés, en fil d'acier

$$P - Q = (1.90 + 0.0021\ Q)\ \frac{p}{D}$$

Les câbles expérimentés avaient des âmes en chanvre, parfois aussi chaque toron était muni d'une âme centrale; les diamètres ont varié de 21 à 33 millimètres.

1. Citées par M. de Longraire dans son important mémoire à la Société des Ingénieurs Civils de France.

La cause principale de la raideur est probablement la résistance au glissement des fils composant le cordage, résistance qui doit être vaincue aussi bien à l'enroulement qu'au déroulement, et qui se traduit par une consommation de travail ; de là l'influence du goudronnage sur les câbles en chanvre, et celle du graissage sur les câbles métalliques.

46. — La composition des câbles métalliques étant très variable comme nature, grosseur, nombre de fils, disposition des âmes en chanvre, commettage en aussières ou en grelins, il serait difficile de caractériser leurs propriétés par une formule unique ; comme première approximation, on peut s'en rapporter, pour les cordages en fer ou en acier, aux expériences suivantes, dans lesquelles p, d et R, ont la signification déjà indiquée :

$$p = 0.0035\ d^2$$
$$R = 15\ d^2 \text{ pour le fil de fer}$$
$$R = 35\ d^2 \text{ pour le fil d'acier}$$

La charge de travail est à peu près $\frac{1}{10}$ de la charge de rupture [1].

1. Les câbles métalliques de la fabrication de M. Vertongen-Goens répondent aux formules

$$p = nd^2$$
$$R = md^2$$
$$d = K\delta$$

dans lesquelles n, m et K ont les valeurs du tableau ci-dessous ; δ est le diamètre du fil.

NATURE DU CORDAGE	NOMBRE des âmes en chanvre	n	m		K
			ACIER MARTIN	ACIER FONDU	
6 torons de 6 fils . . .	—	0.003	20.5	47	9.5
6 — 7 — . . .	—	0.00325	23.7	55	9.5
6 — 8 — . . .	7	0.0026	18.4	42	11.5
6 — 10 — . . .	7	0.0024	16.8	38	13.5
6 — 12 — . . .	7	0.0025	16.2	37.5	15
6 — 19 — . . .	1	0.004	26	60	15

L'industrie fournit actuellement des câbles très flexibles, qui passent sur des poulies dont le rayon est égal à 10 à 15 fois le diamètre du cordage, mais ils sont en fils fins, et ne résistent pas à l'usure, ils ne conviennent pas pour les appareils de levage établis d'une manière permanente; pour ces derniers, le diamètre des tambours et molettes doit avoir au moins 1500 à 2000 fois le diamètre du fil dont se compose le câble.

§ V.

TRAVAIL ABSORBÉ PAR LES CHOCS.

47. — Le choc se produit lorsque deux pièces, animées de vitesses différentes, entrent en contact; on sait que, dans les cas où les corps ne sont pas parfaitement élastiques, il en résulte toujours une perte de force vive pour l'ensemble du système; lorsque leur élasticité est parfaite, et que la détente qui suit la période de compression a pour effet de les ramener à leur forme primitive au moment où cesse le contact, l'ensemble des masses ne subit aucune perte de force vive. En réalité, les pièces entrant dans la composition des machines n'appartiennent à aucune de ces catégories; on admet cependant, au risque d'exagérer les pertes, que les pièces qui se choquent sont dépourvues d'élasticité, elles conservent alors, après le choc, une vitesse commune suivant la normale aux surfaces de contact.

Lorsque deux masses, m, m', se meuvent dans la même direction, et sont animées des vitesses v et v' respectivement, la vitesse V, après le choc, est pour les deux masses :

$$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

L'effet du choc est, dans ce cas, de faire perdre au système total la force vive

$$m(v - V)^2 + m'(V - v')^2$$

et, conséquemment, le choc absorbe une quantité de travail égale à la

moitié de cette force vive, cette énergie transformée en chaleur n'est pas utilisable, elle est perdue pour la production du travail moteur.

Dans les machines, les masses qui se choquent ne sont pas libres, mais se trouvent soumises à des forces extérieures telles que leur poids, les actions motrices, les résistances utiles, etc. On sait que le travail de ces forces, pendant la durée du choc, est négligeable, puisque leur intensité reste finie, et que les chemins parcourus par leurs points d'application sont très petits, tandis que les réactions dues au choc sont très grandes, et que les déplacements de ces réactions sont du même ordre que ceux des forces. On arrive donc à déterminer les vitesses après le choc comme dans le cas de deux masses libres. Toutefois, lorsque le système est tel que le choc développe des réactions sur les appuis, comme celles-ci sont du même ordre que les forces qui naissent au point où la rencontre se produit, on ne peut négliger les travaux passifs qu'elles occasionnent.

On évite le choc autant que possible dans les mécanismes modernes, on ne le rencontre plus guère que dans les cas où il constitue un procédé d'élaboration (martelage, étampage, etc.), et dans des mécanismes accessoires, ayant fort peu de masse, tels que ceux employés dans les distributions de certains moteurs à vapeur. Navier [1] et Poncelet [2] ont analysé d'une manière très complète le marteau commandé au moyen d'un arbre à cames (108), appareil qui était fort répandu autrefois, mais auquel on a substitué aujourd'hui le marteau pilon à vapeur. Nous traiterons ce problème d'une manière sommaire au Chapitre III, afin de donner une idée de la marche à suivre dans l'étude de ces mécanismes.

1. Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique etc.
2. *Traité de Mécanique appliquée aux Machines*.

CHAPITRE III.

Equilibre des mécanismes soumis à des résistances passives.

Nous nous bornerons, dans ce chapitre, à envisager les mécanismes qui, par leur combinaison, constituent les transmissions ; nous supposons ces mécanismes connus au point de vue cinématique, c'est-à-dire en ce qui concerne les mouvements qu'ils réalisent. Notre but est d'arriver à la connaissance du terme

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt$$

ou de

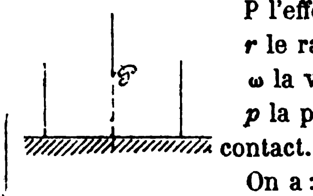
$$\Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{F}_r \, ds$$

qui entre dans les deux formes données à l'équation des forces vives. Nous supposerons que les systèmes sont à l'état de mouvement uniforme, ou bien, s'ils n'en sont pas susceptibles, que leurs vitesses sont, en tous cas assez faibles pour qu'on puisse négliger les forces d'inertie. Les seules forces à considérer sont donc les actions extérieures, et les résistances passives naissant du mouvement (11).

§ I.

SYSTÈMES DANS LESQUELS ON N'A A CONSIDÉRER QUE LE FROTTEMENT

48. — *Pivot chargé suivant son axe.* — (fig. 30). Appelons :



P l'effort agissant suivant l'axe ;
r le rayon du pivot ;
ω la vitesse angulaire constante ;
p la pression uniforme par unité de la surface de contact.

On a :

$$p = \frac{P}{\pi r^2}$$

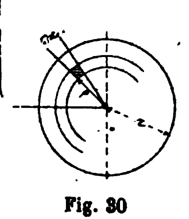


Fig. 30

La force tangentielle qui sollicite chaque élément, en sens contraire du mouvement est :

$$f p \rho \, d\alpha \, d\rho$$

Pour l'élément de temps dt, on trouve facilement que le travail des forces analogues sur toute la surface de contact est donné par

$$\tau_r \, dt = \frac{2}{3} \pi f p r^3 \omega \, dt = \frac{2}{3} f P r \omega dt$$

le travail absorbé par seconde serait :

$$\tau_r = \frac{2}{3} f P r \omega$$

ω s'exprime souvent en fonction du nombre de tours n que fait l'arbre par minute ; or :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

Le travail résistant devient alors :

$$\tau_r = n \frac{\pi f P r}{45} \quad (1)$$

Exemple :

$$P = 3.000 \text{ kil.}$$
$$r = 0.05$$
$$f = 0.07$$
$$n = 70$$

Le travail absorbé par seconde par le frottement du pivot sera :

$$\tau_r = 51.3 \text{ kgm.}$$

ou

$$\frac{51.3}{75} = 0.69 \text{ cheval vapeur}$$

La formule (1) nous apprend que le travail perdu est proportionnel au rayon du tourillon, il y a donc intérêt à le réduire ; d'autre part, la pression par unité de surface étant limitée par la considération du graissage, on ne peut descendre pour r en dessous d'une certaine limite.

49. — La formule précédente peut s'étendre aux épaulements des arbres sollicités suivant leur axe, analogues à ceux qu'on trouve dans les paliers de butée des arbres d'hélice. Le travail absorbé par seconde est alors :

$$\tau_r = \frac{2}{3} f P \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} \omega$$

P est la pression suivant l'axe supporté par l'ensemble des cannelures ou par l'épaulement unique ;

r_1, le rayon extérieur ;

r_0 le rayon intérieur de la surface de contact.

Exemple : Le palier de butée du steamer *Grecian* comporte onze cannelures

$$r_0 = 0.194$$
$$r_1 = 0.232$$
$$P = 12000 \text{ kil.}$$
$$n = 50$$
$$f = 0.05$$

On trouve $\tau_r = 675$ kgm., environ

et

$$\frac{\tau_r}{75} = 9 \text{ chevaux}$$

50. — Certaines expériences sur les lubrifiants (27) ont été faites au moyen de deux disques horizontaux appuyés l'un sur l'autre ; un mouvement de rotation étant communiqué au disque supérieur, on mesure

le moment M à exercer pour maintenir en repos le disque fixe, ce moment a pour expression

$$M = \frac{2}{3} f P r$$

on tire de l'équation la valeur de f, qui est la seule inconnue. Mais on admet implicitement que le coefficient de frottement est le même dans toute l'étendue du plateau, c'est-à-dire qu'il est indépendant de la vitesse.

On peut opérer en prenant comme point de départ une autre hypothèse, et admettre *a priori*

$$f = \psi(v) = \psi(\omega\rho)$$

En introduisant cette valeur dans le calcul du numéro 48, et en opérant à différentes vitesses, on obtiendrait les paramètres de la fonction inconnue.

M. Unwin a opéré de cette manière pour déterminer le frottement des liquides sur les solides (33). En admettant que la résistance par unité de surface est donnée par

$$AV^n$$

formule dans laquelle V désigne la vitesse, A et n des paramètres inconnus, il vient, en appliquant à un disque mince tournant dans l'eau le calcul du numéro 48, et en remarquant que le disque présente deux faces :

$$M = \frac{4\pi}{n+3} A\omega^n r^{n+3}$$

r étant ici le rayon extérieur du disque; deux expériences à des vitesses différentes, mais connues, permettent de trouver les valeurs de A et n après quoi il est nécessaire encore de s'assurer que la formule se vérifie pour une vitesse quelconque, car sinon, la loi supposée ne pourrait être admise.

51. — *Tourillons.* — Les arbres terminés par des tourillons reposant sur coussinets, sont généralement sollicités par des forces perpendicu-

laires à leur axe. On admet que la surface du tourillon, ne pouvant s'emboiter exactement dans le coussinet, ne touche la surface intérieure que suivant une génératrice, c'est-à-dire que les sections droites du tourillon et du coussinet n'ont qu'un point de contact, A (fig. 31). — Les centres du tourillon et du coussinet sont en O et O' respectivement; lorsque le tourillon est en mouvement dans le sens de la flèche, la réaction du coussinet fait avec la normale, c'est-à-dire avec les rayons OA, O'A, un angle égal à l'angle du frottement,

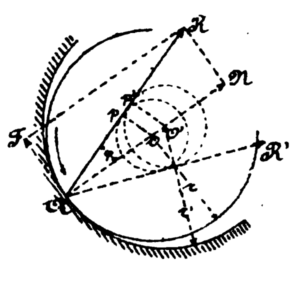


Fig. 31

en désignant par r le rayon du tourillon, par r' celui du coussinet, la réaction R passe donc à la distance

$$Op = r \sin \varphi$$

du centre O,
ou à la distance

$$O'p' = r' \sin \varphi$$

du centre O'

Si le mouvement avait lieu dans l'autre sens, la réaction R, tangente aux circonférences Op, $O'p'$, serait au contraire dirigée suivant AR'.

Lorsque le mouvement est uniforme, la réaction R doit être égale et opposée à la résultante de toutes les forces qui agissent sur le système, on en déduit la direction suivant laquelle agit cette résultante lorsque l'on connait le point de contact A.

Réciproquement, si on connait une direction DD, à laquelle la résultante est parallèle (fig. 32), ainsi que le contour du coussinet dont le centre est en O', et le sens du mouvement, il suffit pour avoir le point de contact A, et par conséquent le centre du tourillon, de décrire du point O' la circonférence de rayon $r' \sin \varphi$, et d'y mener une tangente parallèle à DD, on trouvera ainsi le point de contact A, et l'on portera $Ao = r$ pour avoir le centre du tourillon.

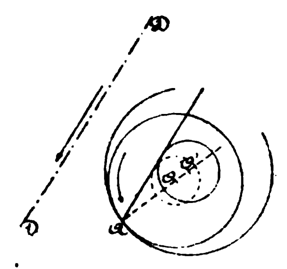
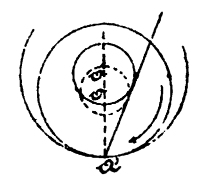


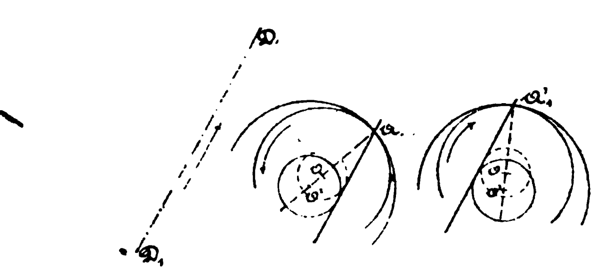
Fig. 32

Il faut remarquer que la composante tangentielle de la réaction doit

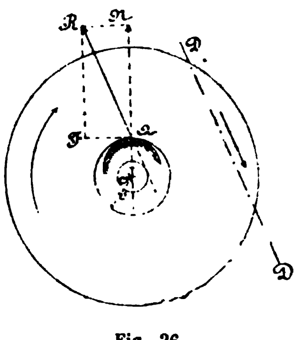
toujours être en sens contraire du mouvement du tourillon; pour le sens de rotation inverse du précédent, on obtient donc la construction indiquée figure 33.


Fig. 33

On pourrait évidemment supposer connu le centre du tourillon, et se servir de la même construction pour déterminer le point de contact, ainsi que le centre du coussinet, on aurait alors à décrire les circonférences pointillées. Enfin, il faut tenir compte du sens de la résultante des forces extérieures, en supposant que la pièce à laquelle appartient le tourillon soit sollicitée vers le haut suivant la direction D_1D_1, on obtient, pour les deux sens de rotation, les figures 34 et 35.


Fig. 34 et 35

Il peut arriver que le tourillon soit fixe, le coussinet fait alors partie de la pièce tournante à laquelle sont appliquées les forces extérieures: il en est ainsi dans les roues tournant sur fusées fixes, les poulies des moufles, les poulies folles, etc, soit O' (fig. 36), le centre de l'œil d'une poulie sollicitée par des forces extérieures dont la résultante est parallèle à DD et agit dans le sens de la flèche. Soit r' le rayon de l'œil, il suffira pour trouver le point de contact avec le pivot, de décrire de O' la circonférence $r' \sin \varphi$, et d'y mener une tangente parallèle à DD on trouvera ainsi le point A pour le sens de rotation indiqué.


Fig. 36

52. — Pour exprimer l'équilibre du système tournant et arriver à la connaissance de la force motrice qu'il est nécessaire de lui appliquer,

on doit recourir à une équation de moment autour de l'axe de rotation; cet axe est choisi de préférence à tout autre, parce qu'il donne aux moments des forces une expression plus simple, il faut donc introduire, dans l'équation, le moment de la réaction du support fixe; si R désigne la réaction (fig. 31), le moment à introduire est

$$R\ r \sin \varphi$$

ou bien (23)

$$Rrf'$$

Dans le cas où le tourillon est fixe (fig. 36), ce moment devient

$$Rr'f'$$

53. — *Galet de guidage.* — Le dispositif représenté par la figure 37, était autrefois employé pour guider en ligne droite le pied de bielle des machines à vapeur verticales; pour le mouvement de haut en bas, le galet, tournant dans le sens de la flèche, doit être en équilibre sous l'action de la force qu'il reçoit de la fourche F de la crossette, et de la réaction qu'il reçoit du guide; il suffit, pour avoir la direction de ces forces, de porter $mM = \delta$ à partir du point de contact géométrique du galet, et de mener par M une tangente au cercle de rayon $r \sin \varphi$, r étant le rayon du pivot.

Si, pour simplifier le problème, nous supposons que les tractions de la tige du piston et de la bielle agissent suivant les axes de ces pièces, on voit que la crossette, et la tige qui fait corps avec elle sont soumises :

1° A la force verticale V provenant de l'action de la vapeur,

2° A la traction de la bielle, dont la direction seulement est connue,

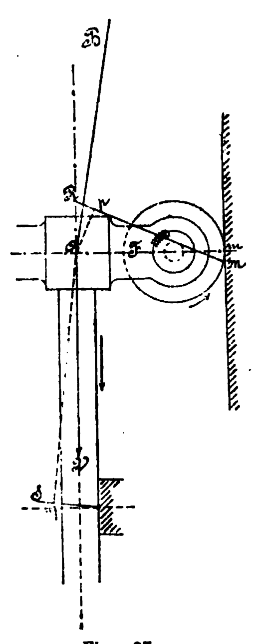


Fig. 37

3° A la réaction R transmise par le pivot du galet, réaction dont on possède également la direction,

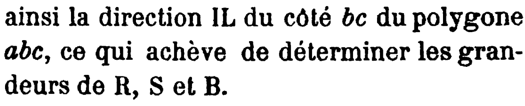
4° A la réaction S provenant du presse-étoupes, inclinée sur la normale de l'angle du frottement.

Toutes ces forces transportées en un point de l'espace et supposées connues, doivent former un contour fermé (équilibre de translation) (fig. 39), il faut de plus :

$$M_o(R, S) = O$$

c'est-à-dire

$$\frac{R}{S} = \frac{Oq}{Op}$$

la connaissance du rapport $\frac{R}{S}$ permet d'effectuer la construction suivante : en un point quelconque I (fig. 38), on mène les quantités IK, KL, parallèles aux directions connues R et S, et égales à Oq, Op ; on connaît ainsi la direction IL du côté *bc* du polygone *abc*, ce qui achève de déterminer les grandeurs de R, S et B.

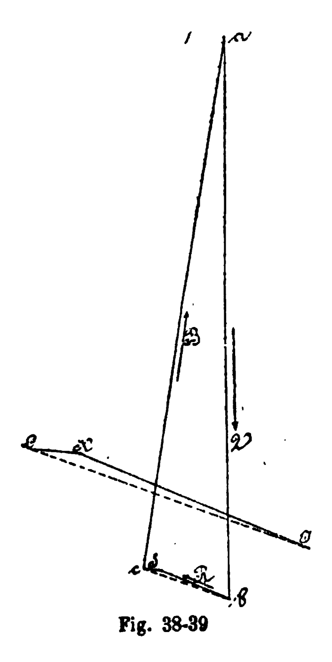
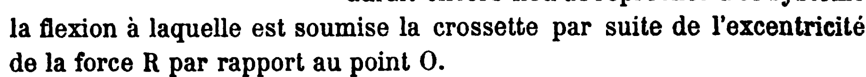


Fig. 38-39

Les choses ne se passent comme nous l'avons supposé, que si la réaction R est comprise dans l'angle du frottement possible entre le galet et le guide, sinon, le galet, au lieu de tourner, fonctionnerait comme une glissière, et l'état de sollicitation se trouverait modifié.

On remarque que la réaction R s'incline d'autant plus sur la normale, que le rayon du pivot augmente, à parité des autres conditions ; si l'on tient compte de ce que le guide fixe est presque toujours graissé par les projections de l'huile du mécanisme, on voit que les galets de l'espèce sont en danger de ne pas rouler, aussi ont-ils été complètement abandonnés pour le guidage ; il y aurait encore lieu de reprocher à ce système la flexion à laquelle est soumise la crossette par suite de l'excentricité de la force R par rapport au point O.

54. — *Glissière ordinaire.* — Dans le cas le plus simple, mais purement hypothétique, d'une glissière (fig. 40) soumise aux forces P et B, agissant sur une articulation centrale O, sans frottement, la réaction R

de la glissière sur le patin passe nécessairement par O, et son inclinaison étant donnée par l'angle du frottement, on déduit la grandeur des forces B et R du triangle des forces, qu'on construit immédiatement.

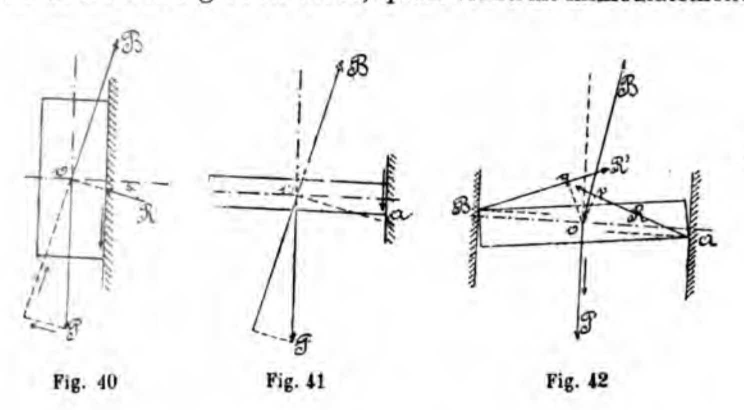


Fig. 40 Fig. 41 Fig. 42

L'équilibre indiqué ci-dessus n'est toutefois réalisé que si la direction OR tombe dans la face de contact du patin; le fonctionnement de la glissière (fig. 41), serait impossible, car l'effet de la résultante de P et B serait précisément de faire tourner le patin autour de son arête A. On peut empêcher ce pivotement, il est vrai, au moyen d'une deuxième glissière (fig. 42), le patin glisse alors par deux arêtes opposées A et B, et est soumis aux réactions R et R' dont les directions sont connues.

On doit avoir par l'équation des moments autour de O:

$$\frac{R}{R'} = \frac{Oq}{Op}$$

On pourra facilement tracer la direction de la ligne *bc* (fig. 43), et, en menant par *a* une parallèle à la bielle, on achèvera de déterminer R, R' et B.

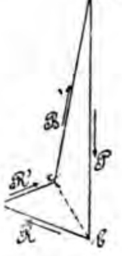


Fig. 43

Ce système serait évidemment très défectueux, puisqu'il fait naître une réaction nouvelle R', et que le frottement dû aux deux réactions R, R' est incomparablement plus grand que celui de la réaction R de la figure 40, mais pratiquement, il est même impossible d'admettre un frottement par les arêtes vives des pièces, le graissage ne serait plus satisfaisant, et il s'ensuivrait aussitôt un grippement.

55. — Dans l'application, les patins de guidage font corps avec la tige, à laquelle ils sont liés par assemblage rigide ou même par soudure (crossettes des machines marines); il est beaucoup plus rationnel de supposer alors que le patin porte également par toute sa face de contact, puisque cette face conserve toujours la direction de la tige, c'est-à-dire celle du guide lui-même, admettons donc que la réaction R du guide agisse au centre de la face d'appui (fig. 44), on pourra, comme dans les numéros précédents, trouver le rapport

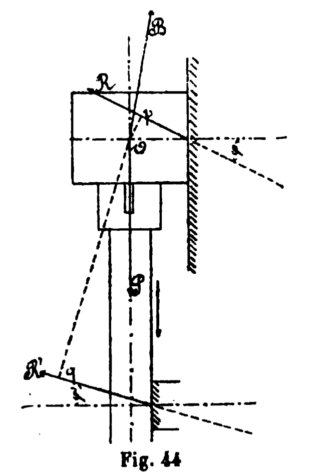


Fig. 44

$$\frac{R'}{R} = \frac{Op}{Oq}$$

et, par conséquent, construire le polygone qui donne les forces inconnues B, R et R'.

Dans le cas particulier où $\varphi = \varphi'$ ce polygone devient le triangle *abc* (fig. 45), dans lequel *bc* est parallèle à la fois à R et R', et représente leur somme; on peut remarquer alors que la composante B conserve la même valeur quel que soit le point où agit la réaction du guide; φ diffé-

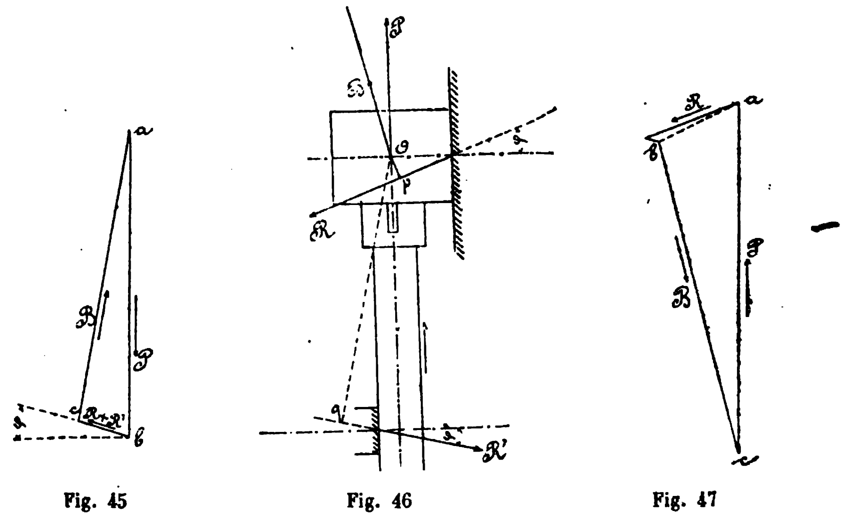


Fig. 45 Fig. 46 Fig. 47

rant toujours fort peu de φ', la construction de la figure 45 donne la valeur de B avec une approximation très suffisante.

Dans le mouvement ascendant du piston, cette simplification n'a plus lieu, l'état de sollicitation est celui donné par les figures 46 et 47.

Si l'on admet que le corps du piston est libre dans le cylindre, c'est-à-dire ne touche la paroi que par l'intermédiaire de garnitures, qui ont toute liberté de jouer latéralement dans leurs rainures (pistons suédois) on constate que le bourrage de la tige est soumis (fig. 44 et 46), à des efforts R' qui changent de sens à chaque course [1], et dont la grandeur varie d'après la position de la crossette, attendu que la force R varie, aussi bien que le rapport des bras de levier Op, Oq.

56. — Ajoutons, cependant, qu'il n'est pas permis dans les systèmes de l'espèce, de faire abstraction des forces d'inertie, attendu que le mouvement ne saurait être uniforme pour chacune des pièces en particulier qui les composent; ces dernières peuvent être partagées en deux catégories :

1° celles qui participent au mouvement rectiligne du piston;

2° la bielle, dont le mouvement résulte à chaque instant de la translation de son centre de gravité et de la rotation autour de ce point.

L'effet de l'inertie sur les premières pièces est de modifier la grandeur de P, et s'il existait seul, il suffirait de tracer les polygones des forces en ajoutant à P et en tenant compte de son signe, la réaction d'inertie des pièces du premier genre; quant aux forces d'inertie provenant du mouvement de la bielle, il est plus difficile d'en tenir compte; M. Massau [2] a résolu complètement cette question, nous mettrons sa méthode à profit dans une autre partie de ce cours.

57. — *Transmission par manivelle lorsque l'on tient compte de tous les frottements.* — Nous simplifierons la question en supposant, comme dans les systèmes à mouvement uniforme, que l'inertie des pièces qui changent de vitesse est négligée; nous ferons aussi abstraction du poids des pièces.

Le sens de rotation étant celui qui se trouve déterminé dans la figure 48, et la bielle étant isolée du manneton, ainsi que du tourillon fixé dans la crossette, il est facile de voir que dans le premier quadrant M_0M_1,

1. Il en est ainsi tout au moins lorsque l'articulation est comprise dans l'angle formé par les réactions R obtenues à la descente et à la montée.

2. *Annales de l'Association des Ingénieurs* sortis des Ecoles spéciales de Gand, 1891.

la ligne d'action des forces qui s'équilibrent par l'intermédiaire de la bielle ne peut être dirigée que suivant la tangente commune t_1t_1, aux circonférences pointillées dont il a été question au numéro 51; nous ne ferons aucune distinction ici entre le rayon du tourillon, et celui de son logement dans les coussinets, ces deux quantités étant pratiquement les mêmes.

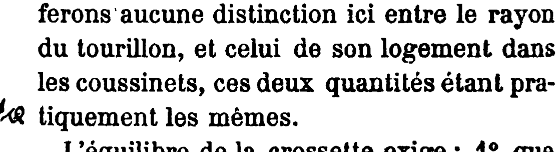


Fig. 48

L'équilibre de la crossette exige : 1° que les forces P, B, R et R' portées bout à bout, forment un polygone fermé, 2° que

$$M_I\ (R, R') = o$$

ou

$$\frac{R'}{R} = \frac{Ip}{Iq}$$

Le point I est l'intersection des deux forces P et B, la direction de cette dernière est connue par la construction déjà indiquée. La force B une fois connue par le triangle de la figure 49, il est facile de déterminer les actions qui se développent sur le système tournant, si l'on fixe, par exemple, la direction de la résistance utile à vaincre, Q. En effet, les forces B et Q devant être équilibrées par la réaction R_1 du coussinet de l'arbre, celle-ci doit passer par leur point d'intersection I'; d'autre part, R_1 doit être tangente à la circonférence du frottement sur l'arbre, ce qui achève de déterminer sa direction, et par conséquent sa grandeur, avec celle de Q.



Fig. 49

Lorsque l'on tient compte du sens des forces qui se produisent dans les deux courses successives, et du changement du sens de rotation de la bielle autour de son pied pendant la révolution entière de l'arbre, on constate que la ligne

d'action prend, par rapport à l'axe géométrique de la bielle, les positions indiquées (fig. 50, 51 et 52.) Il résulte nécessairement de ces diverses

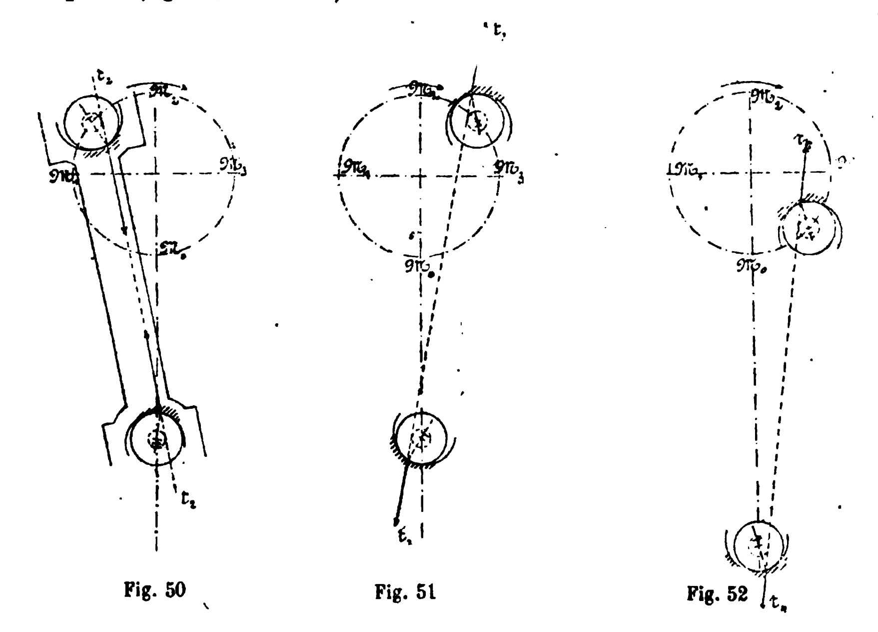


Fig. 50 Fig. 51 Fig. 52

positions de la ligne d'action, d'autant plus excentriques que les tourillons sont plus grands relativement à la longueur de la bielle, un état de sollicitation tout particulier dont il y a lieu de tenir compte pour le calcul des dimensions des bielles; les tourillons des manivelles prennent surtout de grands rayons dans le cas des arbres coudés.

58. — Le travail absorbé par le frottement des bielles sur leurs tourillons est variable à chaque instant avec les forces en jeu; remarquons d'abord que l'amplitude, très faible, du mouvement oscillatoire, permet de négliger le travail du frottement sur le tourillon de la crossette; quant au bouton de manivelle, on peut remarquer que si la bielle se déplaçait parallèlement à elle-même, et si le point de contact avec les coussinets était invariable par rapport à ceux-ci, on aurait, pour le travail élémentaire du frottement:

$$f' \mathrm{B} \rho \, d\alpha$$

B étant la force exercée par la bielle;

ρ le rayon du bouton;
$d\alpha$ l'angle décrit par l'arbre.

Toutefois, lorsque l'on tient compte du mouvement oscillatoire de la bielle, on constate qu'il a pour effet d'augmenter la vitesse de glissement dans le premier et le quatrième quadrants, et qu'il exerce un effet inverse dans l'autre demi-tour; pour une révolution entière, on obtient approximativement le travail du frottement sur le bouton par l'expression

$$2\pi f' B_m \rho$$

B_m étant la valeur moyenne de l'effort exercé par la bielle [1].

Lorsque l'arbre effectue n révolutions par minute, on obtient pour le travail résistant par seconde, exprimé en chevaux:

$$\frac{\tau_r}{75} = \frac{2\pi n}{60 \times 75} f' B_m \rho$$

Il est à peine nécessaire de remarquer que ce travail est toujours proportionnel au rayon du bouton.

Applications numériques. — 1° Les machines motrices du paquebot *Servia* comportent un arbre moteur à trois coudes, on a:

$$B_m = 70{,}000 \text{ kil. environ}$$
$$\rho = 0{,}320$$
$$n = 53$$

On admet qu'avec le système de graissage employé,

$$f' = 0{,}011$$

On a donc: $\frac{\tau_r}{75} = 18{,}2$ chevaux, ou, pour les trois bielles: 54,6 chevaux.

Ce chiffre peut paraître fort élevé mais il faut remarquer qu'il s'agit ici d'un appareil qui développe plus de 10,000 chevaux, et que les tourillons des coudes ont 640 millimètres de diamètre.

1. Cette valeur moyenne devrait être calculée en prenant un certain nombre de positions équidistantes de la manivelle.

2° On a pour une machine fixe:

$$B_m = 7{,}000 \text{ kil.}$$
$$\rho = 0{,}065$$
$$n = 60$$
$$f' = 0{,}011$$

Il vient, pour le travail perdu à la tête de bielle:

$$\frac{\tau_m}{75} = 0{,}42 \text{ chevaux}$$

Les valeurs ci-dessus se rapportent a un moteur développant environ 200 chevaux.

On voit, par ces exemples, que le travail absorbé par le frottement des têtes de bielle est peu important, surtout pour les manivelles ordinaires.

59. — ***Points morts.*** — Les transmissions par bielle, lorsqu'on les suppose sans frottement, n'ont que deux positions d'arcboutement, auxquelles on donne le nom de *points morts.* On suppose bien entendu, que le système est employé pour transformer le mouvement alternatif en mouvement de rotation, car, dans le cas inverse, la commande est toujours possible.

Lorsque l'on tient compte du frottement qui se produit aux différents points de contact des pièces entre elles, on reconnaît que l'arcboutement s'étend de part et d'autre des points morts, dans une zone qu'on peut déterminer.

Pour que le mouvement soit possible, il est nécessaire que la ligne d'action de la bielle, déterminée en tenant compte des frottements aux deux articulations, passe en dehors de la circonférence de rayon $\rho'' \sin \varphi$ qui appartient à l'arbre.

En prenant la bielle dans la position $C_0M'_0$ (fig. 53), qui correspond à la limite de la

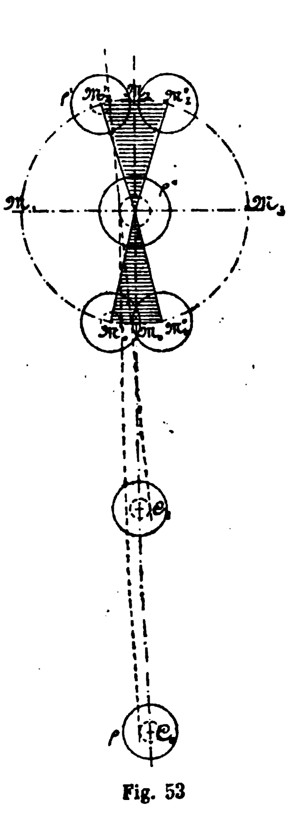
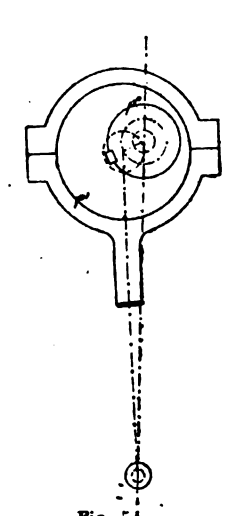


Fig. 53

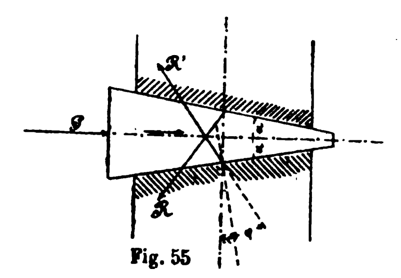
zone d'arcboutement, on voit facilement que la ligne d'action est tangente à la fois aux trois circonférences-enveloppes ; de plus, en tenant compte de ce qui a été expliqué au n° 57, on reconnait que la zone cherchée, $M'_0 M''_0$, est symétrique par rapport au point mort géométrique M_0; la zone qui correspond au point mort supérieur est $M'_1 M''_1$ elle est un peu plus étendue, et augmente la difficulté de mise en train des machines.

60. — *Arcboutement des excentriques.* — Tout ce qui contribue à augmenter les rayons des circonférences-enveloppes, a pour effet d'augmenter l'étendue des zones d'arcboutement; il faut citer, en premier lieu, l'influence du rayon du bouton de manivelle, qui peut prendre, dans les excentriques (fig. 54), une valeur très grande en comparaison du rayon d'excentricité; les circonférences $\rho' \sin \varphi$, $\rho'' \sin \varphi$ peuvent arriver à se toucher, auquel cas la zone d'arcboutement envahit toute la circonférence.


Fig. 54

Il est évident, pour cette raison, que l'excentrique ne peut être employé pour la transformation du mouvement alternatif en mouvement circulaire, et qu'il doit être réservé pour la transformation inverse ; l'importance du travail absorbé par le frottement limite l'emploi de l'excentrique au cas où l'effort à transmettre est peu considérable, comme pour la commande des distributeurs [1], des pompes alimentaires, et exceptionnellement, des pompes à air.

61. — *Coins de calage.* — Le coin permet d'obtenir une grande multiplication d'efforts sans aucune complication de mécanisme, puisqu'il suffit, pour réaliser une pression pour ainsi dire illimitée, de diminuer l'angle de ses faces; sa propriété d'être irréversible en dessous d'une certaine inclinaison le rend particulièrement propre au calage des ponts mobiles, à la fixation de certains assemblages, etc. Pendant la période d'enfoncement du coin, la force motrice P (fig. 55) est équilibrée par les réactions R, R' dirigées en sens convenable, et inclinées, sur les nor-


Fig. 55

1. On peut citer parmi les plus grands excentriques qui existent, ceux du paquebot Servia, dont les tourteaux ont 1^m, 448 de diamètre (4'-9")

males aux deux faces, de l'angle du frottement; les directions R et R' étant connues, ainsi que leur point de concours, on peut trouver en grandeur et direction la valeur de l'effort P, supposé horizontal, que l'on doit exercer pour vaincre les réactions lorsque l'on connait leur composante verticale N (fig. 56).

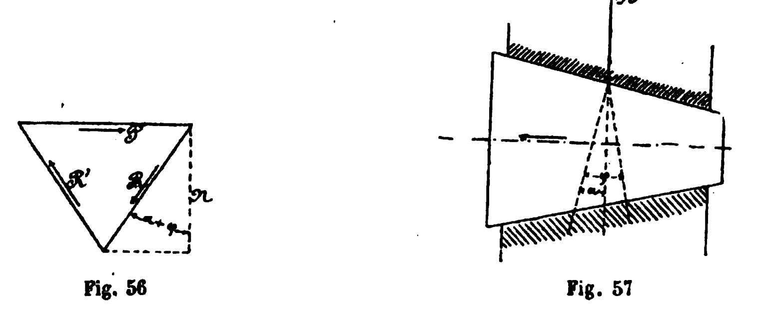


Fig. 56 Fig. 57

Lorsque le coin est abandonné à lui-même, la force verticale N qui tend à rapprocher les sabots (fig. 57), ne peut déterminer le mouvement si elle est comprise dans l'angle φ mené à partir de la normale aux points d'application, cette condition exige que l'angle 2α, du coin, soit inférieur à 2φ; il y a lieu, cependant, de se tenir pratiquement en dessous de cette limite, à cause de l'incertitude qui règne sur la valeur du coefficient de frottement.

La même observation s'applique aux clavettes de serrage employées dans les organes de machines.

Le rendement du coin employé comme appareil de levage est égal au rapport U entre le travail utile accompli

$$2\,N\,dh$$

(dh étant le déplacement de chacune des réactions N), et le travail dépensé $P ds$.

ds étant le déplacement du coin suivant son axe; or, on a (fig. 56)

$$P = 2\,N\,tg\,(\alpha + \varphi)$$

et

$$dh = ds\,tg\,\alpha$$

D'où

$$U = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varphi)}$$

Lorsque α est inférieur à φ, ce qui existe toujours dans le coin non reversible, la valeur de U est faible et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Abstraction faite de la condition d'arcboutement, le rendement U est susceptible d'un maximum qu'on obtiendrait en posant

$$\frac{dU}{d\alpha} = o$$

Cette recherche est analogue à celle du numéro 63.

62. — *Vis à filet carré.* — Admettons que la vis soit employée comme appareil de levage, c'est-à-dire qu'elle ait à vaincre une force Q dirigée suivant son axe (fig. 58), supposons en outre qu'elle se meuve dans un écrou fixe, ainsi que cela a lieu pour les vérins de levage, et que les forces motrices soient appliquées sous forme d'un couple, P*p*, ou M agissant dans un plan normal à l'axe.

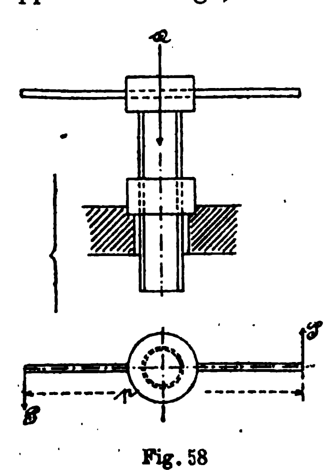


Fig. 58

Pour simplifier la question, nous ferons abstraction de la largeur du filet dans le sens du rayon, en le réduisant à l'hélice moyenne de contact ; la vis isolée est soumise à l'effort Q, au couple M, et aux réactions qui se développent en chaque point de l'hélice moyenne ; s'il n'y avait pas de frottement, ces réactions seraient, en chaque point, normales à l'hélice moyenne, et situées dans le plan tangent au cylindre qui la contient ; l'effet du frottement est de faire naitre sur chaque élément, ds, du filet, une résistance tangentielle

$$fN\, ds$$

dirigée en sens contraire du glissement du filet de la vis sur l'écrou.

Par la nature du problème, il suffit, pour exprimer l'équilibre, et déterminer la valeur des réactions N et du moment P*p*, d'avoir recours à deux équations : l'une, d'équilibre de translation parallèlement à l'axe, l'autre, d'équilibre de moment autour du même axe ; on arrive facilement à éliminer N, et à déterminer le moment inconnu M.

On peut aussi ramener l'équilibre à celui d'un corps pesant posé sur

un plan dont l'inclinaison serait celle du filet. Pour y parvenir, effectuons sur les forces des transports parallèles, et substituons aux couples, des forces d'égal moment par rapport à l'axe de la vis; si ces changements sont choisis de manière à n'altérer aucune des deux équations, l'équilibre du nouveau système exprimera en même temps celui des forces agissant réellement.

Ainsi, transportons la force Q parallèlement à elle-même en un point A de l'hélice moyenne (fig. 59), substituons au moment du couple M celui de la force K, agissant dans le plan tangent au cylindre et dans une direction perpendiculaire à l'axe, la force K inconnue, étant choisie de manière à ce que

$$Kr = Pp$$

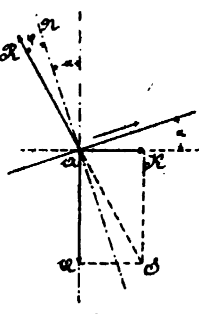


Fig. 59

Substituons enfin, aux réactions qui agissent sur chaque élément, leur somme algébrique pour tout le filet, comme si elles étaient parallèles dans l'espace, et appliquons ces forces ou leur résultante R, au point A dans le plan tangent au cylindre.

Les seules forces Q, K et R sont situées dans le même plan, et leur équilibre entraîne celui des forces réelles; la force R est connue en direction, puisqu'elle est inclinée de l'angle φ sur la normale; cette condition permet d'achever le rectangle QSK qui détermine à la fois R et K.

La figure donne

$$K = Q \, tg \, (\alpha + \varphi)$$

ou

$$Pp = Qr \, tg \, (\alpha + \varphi)$$

Le moment conserve une valeur finie pour autant que l'on ait

$$\alpha < 90^\circ - \varphi$$

La valeur de φ étant toujours très faible, on voit qu'il est généralement possible de vaincre la charge Q au moyen d'un couple de moment Pp [1],

1. Pour la vis à filet *triangulaire*, on peut procéder par le calcul; on trouve, en appelant β l'angle de la génératrice du profil avec le rayon, et en adoptant, pour le reste, les même notations que ci-dessus :

$$Pp = Qr \frac{tg\,\alpha + f \cos\alpha \sqrt{1 + tg^2\,\alpha + tg^2\,\beta}}{1 - f \sin\alpha \sqrt{1 + tg^2\,\alpha + tg^2\,\beta}}$$

pour $\beta = o$, on retombe sur la formule de la vis à filet carré. Dans la série Whitworth, on a :

$$\beta = 27^\circ 30'$$

63. — *Rendement de la vis à filet carré.* — Le travail utile effectué, qui correspond au déplacement angulaire, β, de la vis, a pour expression

$$Qr\,\beta\,tg\,\alpha$$

et le travail du couple est

$$Pp\,\beta = Qr\,\beta\,tg\,(\alpha + \varphi)$$

ce qui donne pour le rendement

$$U = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varphi)}$$

cette valeur s'annule pour

$$\alpha = o$$

et pour

$$\alpha = 90^\circ - \varphi$$

Le maximum est fourni par

$$\frac{dU}{d\alpha} = o$$

équation qui donne:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Cette valeur α étant voisine de 45°, ne conviendrait pas à un appareil de levage, car la vis qui en résulterait n'exercerait aucun effet multiplicateur; une autre condition est du reste généralement imposée en ce cas, c'est que le mouvement de la vis ne peut être réversible, c'est-à-dire que la force Q, agissant seule, ne doit pas déterminer le mouvement; ce point est examiné au numéro suivant.

64. — Pour étudier les conditions de réversibilité de la vis, nous

admettrons qu'elle puisse céder à l'effort longitudinal Q; il s'agit alors de trouver le moment M capable de maintenir la vis en mouvement uniforme. Le glissement relatif ayant changé de sens, il en est de même de l'inclinaison φ sur la normale au filet, on trouve donc (fig. 60)

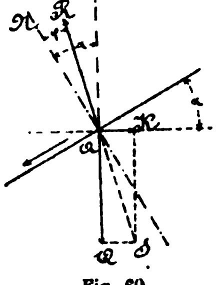


Fig. 60

$$K = Q \, tg \, (\alpha - \varphi)$$

c'est-à-dire que le moment M est positif pour toute valeur

$$\alpha > \varphi$$

à défaut de ce moment M, la vis cède à l'effort longitudinal; pour que l'appareil ne soit pas réversible, on doit avoir

$$\alpha \overline{\overline{<}} \varphi$$

condition qui doit toujours être réalisée dans les appareils de levage.

Application numérique. — D'après les règles en usage dans la construction des vis à filet carré, on a:

$$p = 2 + 0.09 \, d$$

$$c = \frac{1}{2} p = 1 + 0.045 \, d$$

d représente le diamètre extérieur du filet, p et c représentent le pas et le creux, respectivement; toutes ces quantités sont exprimées en millimètres.

On a donc

$$2r = d - c = 0.955 \, d - 1$$

$$tg \, \alpha = \frac{p}{2\pi r} = \frac{2 + 0.09 \, d}{\pi(0.955 d - 1)}$$

$tg\alpha$ augmente au fur et à mesure que d diminue, prenant par exemple $d = 30$ ce qui correspond à une vis de petit diamètre, on a

$$tg \, \alpha = 0{,}054$$

Le coefficient de frottement au repos des métaux, même lorsqu'ils sont graissés, reste au-dessus de cette valeur, on en conclut que la vis dans les conditions ordinaires n'est pas réversible.



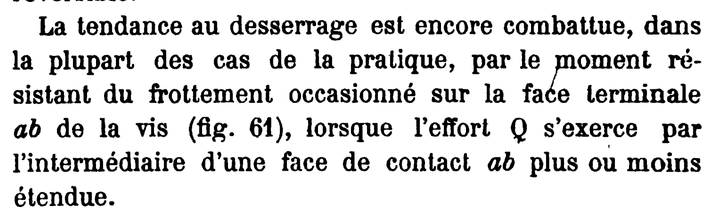


Fig. 61

La tendance au desserrage est encore combattue, dans la plupart des cas de la pratique, par le moment résistant du frottement occasionné sur la face terminale *ab* de la vis (fig. 61), lorsque l'effort Q s'exerce par l'intermédiaire d'une face de contact *ab* plus ou moins étendue.

65. — On peut avoir à considérer aussi le cas d'une vis immobile, sur laquelle se trouverait engagé un écrou, ainsi que cela existe toujours pour les boulons de serrage (fig. 62); si l'on suppose que la base de l'écrou repose sans frottement sur une rondelle, la réaction des pièces serrées produit sur l'écrou des forces *q* ayant une résultante Q, agissant suivant son axe, et la théorie du numéro 63 peut s'appliquer

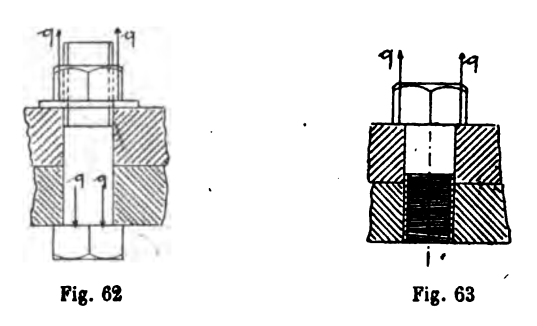


Fig. 62 Fig. 63

entièrement; en réalité, le frottement qui s'exerce sur la base de l'écrou combat la tendance au desserrage, et a pour effet d'élever la limite des inclinaisons possibles; l'emploi d'une large embase ne peut que contrarier le desserrage (49). Nous ajouterons que, dans les cas où le corps du boulon est soumis à des efforts alternatifs, comme dans les assemblages des tiges de piston, par exemple, ou lorsque les pièces sont exposées à des vibrations, il faut recourir, pour assurer la tenue de l'écrou, à des moyens spéciaux, bien connus des constructeurs mécaniciens.

Les remarques-ci-dessus s'appliquent également aux vis d'assemblage (fig. 63).

66. — *Des engrenages.* — Nous supposons connues les diverses méthodes employées pour le tracé des engrenages; les axes O et O' étant donnés, ainsi que les vitesses angulaires ω et ω', on sait que si r et r' désignent les rayons des cercles primitifs,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

ce qui permet de déterminer le point M (fig. 64); σ étant le profil adapté à la roue O, et Σ celui adapté à la roue O', C le point de contact des deux dents, la ligne MC est normale aux deux profils en leur point de contact.

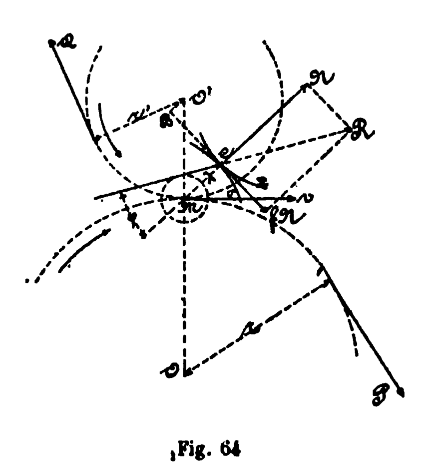


Fig. 64

Le mouvement relatif des deux roues peut s'obtenir en rendant fixe la roue O, et en faisant rouler la roue O' sur celle-ci, de manière que leur point de contact M se meuve vers la gauche avec la vitesse ωr; de cette manière la dent σ est fixe, et le profil Σ se déplace en restant tangent à σ; ce déplacement résulte à la fois du roulement des deux courbes l'une sur l'autre, et de leur glissement relatif suivant la tangente; la vitesse v_g du glissement est donnée par

$$v_g = \Omega\lambda$$

Ω étant la vitesse angulaire du système roulant O' et λ la grandeur de la normale CM pour la position considérée.

Ω se déduit facilement de la vitesse des roues, on a pour les engrenages extérieurs:

$$\Omega = \omega + \omega', \; v_g = (\omega + \omega')\,\lambda$$

tandis que l'on a pour des roues intérieures,

$$\Omega = \omega' - \omega, \; v_g = (\omega' - \omega)\,\lambda$$

ω' se rapportant à la petite roue.

Et pour un pignon engrenant avec une crémaillère:

$$\Omega = \omega', \; v_g = \omega'\,\lambda$$

Lorsque les dents sont appliquées l'une sur l'autre par une certaine pression provenant de l'application des forces extérieures, le glissement entraîne du frottement, tandis que la résistance au roulement, toujours très faible, peut être négligée.

67. — Pour déterminer l'état de sollicitation de chacune des roues, nous remarquerons que la réaction au point de contact C, au lieu d'être dirigée suivant la normale CM, fait avec celle-ci l'angle φ du frottement; le sens dans lequel il faut porter l'angle φ, dépend du sens du mouvement. Nous négligerons d'abord le frottement des arbres O et O' sur leurs supports.

Pour achever de résoudre le problème, on peut employer diverses méthodes:

1° On peut écrire l'équation d'équilibre du système O', la force R sera, pour plus de facilité, remplacée par ses deux composantes: N et fN; on écrira ensuite l'équation d'équilibre du système O; l'élimination de N entre les deux équations fournira la relation cherchée entre P et Q.

2° On peut écrire l'équation des travaux virtuels pour l'ensemble du système; soit v la vitesse linéaire du point de contact M, on a évidemment, pour les engrenages extérieurs :

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega' = \frac{v}{r'}$$

$$v_g = v\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\lambda$$

L'équation des travaux virtuels donne, après simplification :

$$P = Q + f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \lambda N$$

Pour éliminer N, il est encore nécessaire de recourir à une équation d'équilibre, celle du système O', par exemple ; on a, en désignant l'angle O'MC par α, et faisant $O'B = p$

$$N = \frac{r'}{r' \sin \alpha + fp} Q$$
$$p = r' \cos \alpha - \lambda$$

α et λ peuvent être liés par une relation géométrique (tracé épicycloïdal) ou rester indépendants (tracé en développante) ; quoiqu'il en soit leurs valeurs peuvent être déterminées pour chaque position du point C.

On sait que, pour le tracé épicycloïdal à flancs droits, $p = o$; cette condition, introduite dans les équations, donne :

$$P = Q + f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{\lambda}{\sin \alpha} Q$$

La valeur de P varie à chaque instant ; si on veut trouver le travail de cette force pour un certain déplacement du point M, on devra écrire

$$\int_{s_0}^{s_1} P ds = Q(s_1 - s_0) + f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) Q \int_{s_0}^{s_1} \frac{\lambda}{\sin \alpha} ds$$

Pour obtenir la valeur du dernier terme, il est nécessaire d'exprimer λ et α en fonction de s.

On se contente d'une solution approchée, qui consiste à chercher la valeur moyenne de P en supposant que le contact commence à la ligne des centres, on sait qu'il se termine généralement à une distance égale au pas ; on attribue à λ une valeur constante égale à la moitié du pas, et α étant voisin de 90°, on fait $\sin \alpha = 1$. On a du reste, si m et m' désignent les nombres de dents des roues O et O', et si a représente le pas :

$$2\pi r = ma$$
$$2\pi r' = m'a$$

et l'on fait

$$\lambda = \frac{a}{2}$$

ce qui donne finalement :

$$(1) \qquad P = Q + \pi f Q \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$$

Telle est la formule usuelle qui donne la valeur P en fonction de Q, en négligeant toute résistance autre que le frottement des dents; elle nous apprend que le terme additionnel dû à ce frottement, diminue au fur et à mesure que *m* et *m'* augmentent, c'est-à-dire que les dentures deviennent plus fines.

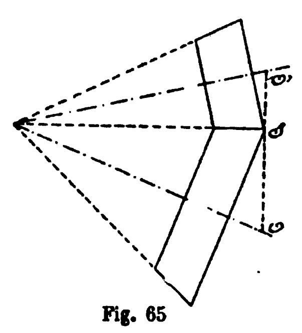
On trouverait facilement, pour les roues qui engrènent intérieurement:

$$(2) \qquad P = Q + \pi f Q \left(\frac{1}{m'} - \frac{1}{m}\right)$$

et pour les crémaillères :

$$(3) \qquad P = Q + \pi f Q \frac{1}{m'}$$

Enfin, on applique aussi la formule (1), au cas des roues coniques, *m* et *m'* représentent alors les nombres de dents qui entreraient dans les circonférences de rayon OS et O'S, respectivement (fig. 65).


Fig. 65

Le tracé épicycloïdal n'est employé que pour des roues de grand rayon, à denture peu fatiguée, le tracé en développante ou la méthode de Willis, sont préférables dans la plupart des cas; néanmoins, on peut encore, avec une approximation suffisante, adopter les formules ci-dessus pour ces divers tracés; il faut observer, en effet que le contact ayant toujours lieu dans le voisinage de la ligne des centres, la pression normale qui engendre le frottement est à peu près égale à l'effort Q.

En réalité, l'effort est exercé par plusieurs dents qui agissent simultanément, la manière suivant laquelle il se partage entre les dents en prise, dépend du degré de précision que présentent les dentures, mais on conçoit que le travail des résistances reste à peu près le même que dans l'hypothèse admise.

3° Enfin, on peut trouver, par un moyen graphique, la grandeur de la force P: considérons d'abord le système O' (fig. 66); la direction de

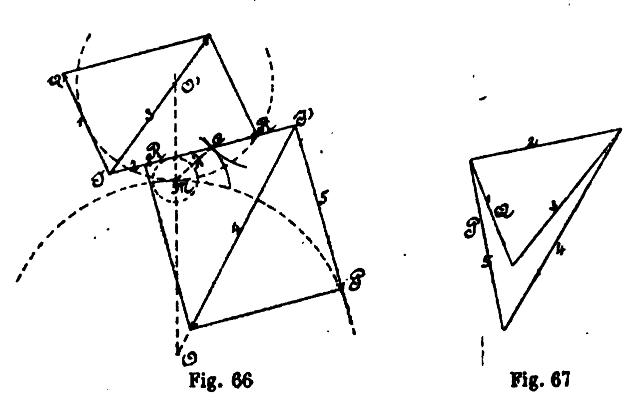


Fig. 66 Fig. 67

la force R est connue, elle reste tangente, quelle que soit la position du point C, à une circonférence décrite du point M, et dont le rayon est

$$\lambda \sin \varphi$$

On achève facilement le parallélogramme qui donne P; on peut aussi opérer au moyen de tracés polygonaux (fig. 67).

68. — Pour tenir compte du frottement des arbres sur leurs coussinets, on adopte une solution approchée: on cherche l'effort moteur X qu'il serait nécessaire d'appliquer au point M de la roue O', pour entrainer la résistance Q ainsi que les résistances passives (fig. 68) (1).

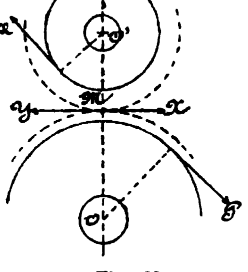


Fig. 68

Soit ρ' le rayon du tourillon,

f_1 son coefficient de frottement sur les coussinets,

R' la réaction totale sur le tourillon.

L'équation d'équilibre autour de O' donne:

$$(a) \qquad Xr' = Qr' + f_1' \rho' R'$$

1. L'arbre comporte nécessairement deux tourillons, mais nous admettrons toujours, à moins de supposition contraire, qu'ils sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen de la roue; les réactions des coussinets étant égales et parallèles, on peut les ajouter, et il en est de même de leurs moments, si donc les tourillons sont de même diamètre, on pourra considérer le système comme n'ayant qu'un seul tourillon dont le plan moyen coïncide avec celui des forces sollicitantes, et qui reçoit la réaction totale.

Les deux équations de projection permettraient d'exprimer la réaction R' (qui n'est autre chose que la résultante des forces Q, X) en fonction des composantes de ces forces suivant deux axes.

On considère ensuite l'effort moteur X comme amenant sur le système O une réaction Y, donnée par la formule (1)

$$Y = X + \pi f X \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \quad (b)$$

Enfin, la condition d'équilibre du système O autour de son axe donne, en appelant ρ le rayon du tourillon, et R la réaction totale des coussinets

$$Pr = Yr + f_1' \rho R \quad (c)$$

R s'exprime facilement en fonction des composantes de P et de Y.

L'élimination de X et Y entre les trois équations (*a*) (*b*) (*c*), donne la valeur cherchée.

Cette solution n'est qu'approchée, attendu qu'en appliquant au point M la force X, inconnue, qui doit entraîner la roue O', nous substituons, à la réaction totale des dents en contact, une force qui en diffère un peu ; la même observation s'applique au système O.

69. — D'une manière générale, il convient de remarquer que la position de toute force motrice agissant sur un système soumis à un frottement, influe sur la grandeur même de la force, attendu que cette position détermine la valeur de la réaction sur les supports, et par conséquent l'importance du frottement.

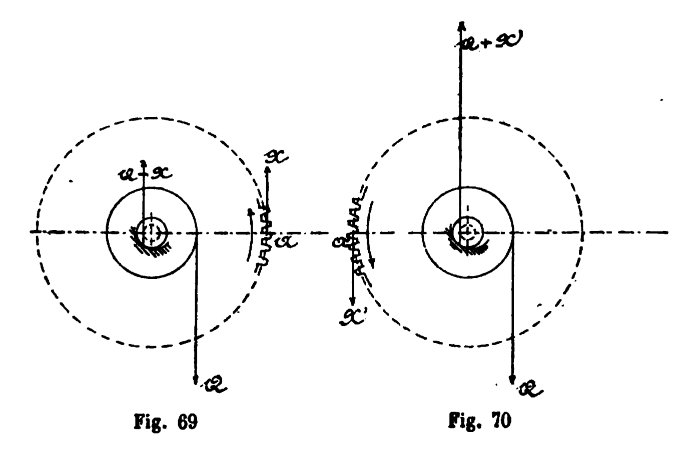


Fig. 69 Fig. 70

On peut mettre cette propriété à profit pour réduire les résistances passives, lorsque la disposition de certains organes est arbitraire; ainsi, le treuil à engrenage (fig. 69), peut être actionné par un pignon placé en A, c'est-à-dire du même côté que la résistance Q : dans ce cas, la réaction sur le tourillon est nécessairement égale à $Q - X$; si, au contraire, on fait agir le pignon au point A' (fig. 70), c'est-à-dire du côté opposé à la résistance, la réaction totale sur le tourillon de l'arbre principal est égale à $Q + X'$; la première disposition est donc préférable.

70. — On peut, en employant le procédé graphique indiqué au numéro 67 — 3°, tenir compte du frottement des tourillons, et l'on obtient alors une solution exacte du problème; le point de contact des dents en prise étant en C (fig. 71), on trace, autour de M, la circonférence

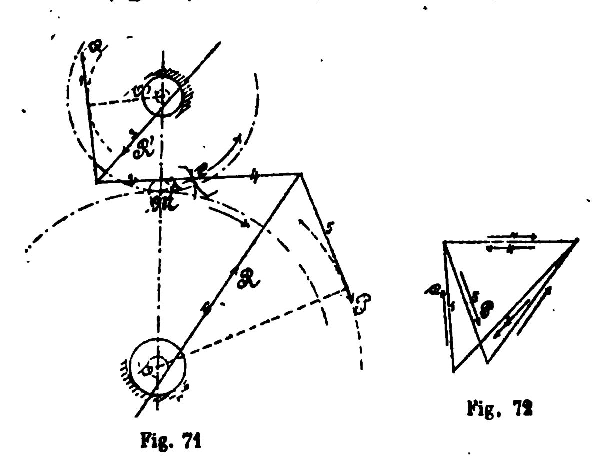


Fig. 71

Fig. 72

enveloppe de la réaction; on trace de même autour de O' et de O les circonférences enveloppes des forces R et R'; la construction s'achève par les moyens ordinaires, la force P est donnée par le côté 5 du polygone des forces.

Quel que soit le tracé adopté, le contact commence à une certaine distance au delà de la ligne des centres, il faut, pour que le mouvement soit possible, que la réaction des dents reste en dehors des circonférences enveloppes O, O'; pour des roues à dents épicycloïdales tournant dans le sens des flèches (fig. 73), le contact commence à gauche de la ligne des centres au point C; la réaction de la dent en ce point peut se rapprocher beaucoup de la circonférence enveloppe tracée autour de

6

O', et il en résulte une valeur très grande de P, (fig. 74). En diminuant le rayon de O' tout en conservant le même pas, on produirait l'arcboutement; on a soin de se tenir aussi loin que possible de cette limite, en

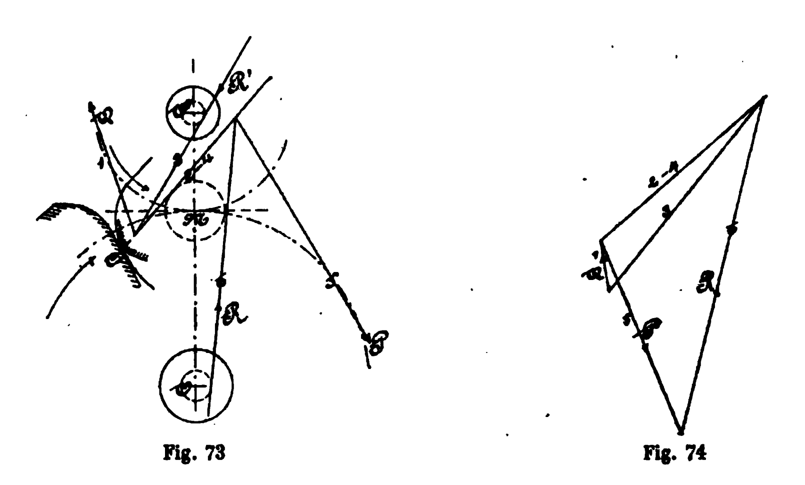


Fig. 73 Fig. 74

adoptant pour le pas une valeur assez faible; pour un effort circonférentiel donné, la largeur des dents suivant la génératrice augmente lorsque l'épaisseur diminue, ce qui explique les difficultés que l'on peut avoir à transmettre au moyen de roues de petit diamètre un effort considérable.

L'emploi des dents à chevrons permet de réaliser une grande résistance sans augmenter le pas; au point de vue du frottement, l'étude de l'engrenage à chevrons se ramène au cas ordinaire, car on peut le décomposer, par des plans perpendiculaires à l'axe, en une série de roues très minces.

71. — Lorsque la vitesse angulaire des arbres n'est pas imposée et qu'il s'agit simplement de transmettre une *puissance donnée*, on peut diminuer la valeur de l'effort circonférentiel par une augmentation des nombres de tours, ou bien, si l'on peut écarter les axes, il est encore possible, en adoptant des rayons plus grands, d'arriver au même résultat. Les deux moyens peuvent être employés simultanément, ils reviennent tous deux à augmenter la vitesse de roulement des circonférences primitives. Cependant le fonctionnement des engrenages donne toujours

lieu à des vibrations qui augmentent avec la vitesse, il est bon de se tenir à cet égard entre les limites que l'expérience a indiquées [1].

72. — *De la vis tangente.* — Lorsque le rapport des vitesses à réaliser est très grand, les inconvénients signalés au numéro 70 obligent à employer des arbres intermédiaires ; il peut du reste arriver que les axes, au lieu d'être parallèles, soient perpendiculaires en direction, on emploie alors la vis tangente ; admettons que le profil du filet se compose (fig. 75) d'une partie droite *b*M, et de l'arc M*c*, appartenant à la cycloïde décrite par la circonférence sous double de la roue ; on sait que le profil de la dent se compose du rayon *c'*M, et d'un arc M*b'* de la développante de la circonférence primitive de la roue. On voit que le contact dans le plan de la figure, qui est celui mené par l'axe de la vis perpendiculairement à l'arbre de la roue, commence au point *a*, sur la

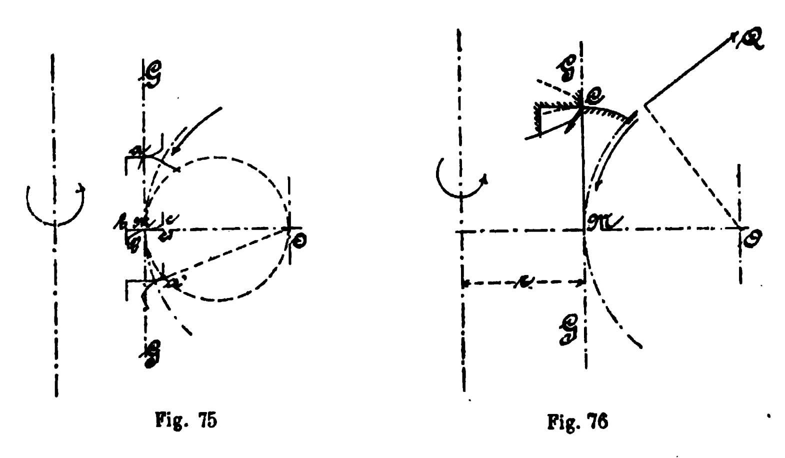


Fig. 75 Fig. 76

génératrice du cylindre moyen, se déplace sur *a*M, et suit alors la circonférence sous-double jusqu'au point *a'*. La zone de contact M*a'* peut être supprimée, il suffit, pour cela, de limiter le filet à la génératrice GG; les flancs droits de la roue n'existent plus, et l'on évite le déforcement des dents à la racine ; admettons ce mode de tracé, et supposons qu'une seule dent soit attaquée par le filet (fig. 76). Il s'agit de déterminer, en

1. On cite comme exemple d'une très grande vitesse, celui d'un volant denté établi par la maison Corliss, tournant à 50 révolutions par minute, et dont le diamètre primitif est de 9m, 144 (30 pieds), ces données portent la vitesse au chiffre de 24 mètres par seconde, valeur rarement atteinte, même dans les transmissions par courroies. Engineering 1888 1er sem. p. 285.

admettant d'abord que les tourillons ne donnent lieu à aucun frottement, la valeur de l'effort P à appliquer à la vis dans le plan tangent au cylindre GG, et perpendiculairement à son axe, pour vaincre la résistance Q; le glissement qui s'opère entre les deux organes au point C, donne lieu à une résistance qui augmente la valeur de P.

Désignons par :

α, l'angle de l'hélice de contact sur la section droite de la vis;

r, le rayon du cylindre contenant cette hélice;

ω, la vitesse de rotation de la vis;

λ, la normale MC, comprise entre le centre instantané M, et le point de contact C pour la position considérée;

r', le rayon primitif de la roue;

ω', la vitesse angulaire de la roue.

Pour la vitesse angulaire ω, imprimée à la vis, tout point situé à la distance r est animé perpendiculairement à l'axe, d'une vitesse

$$r\omega$$

et le point C, situé à l'intersection de l'hélice avec le plan de la figure est animé suivant la droite CM, d'une vitesse

$$r\omega \, tg \, \alpha$$

cette vitesse est aussi celle de la circonférence primitive de la roue; on a donc :

$$(1) \qquad r'\omega' = r\omega \, tg \, \alpha$$

ou

$$\omega' = \frac{r}{r'} \omega \, tg \, \alpha$$

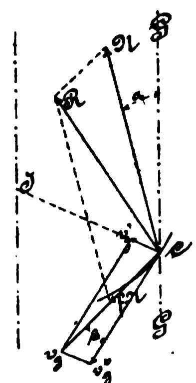


Fig. 77

Le glissement de la dent sur la génératrice CI du filet, (fig. 77), s'opère avec une vitesse

$$v'_g = \lambda\omega' = \frac{r}{r'} \lambda\omega \, tg \, \alpha$$

tandis que l'hélice glisse en même temps suivant sa direction, et est animée d'une vitesse constante v''_g, par rapport au point M.

On a :

$$v''_g = \frac{\omega r}{\cos\alpha}$$

La vitesse de glissement totale est la résultante des vitesses v'_g et v''_g.

Il importe de ne pas se tromper sur le sens de ces vitesses, et pour cela, il faut n'avoir égard qu'au mouvement relatif des deux organes l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire l'un des deux étant considéré comme fixe : la vis, par exemple ; la vitesse v'_g doit alors être prise de C vers I et la vitesse v''_g doit être prise en sens contraire du mouvement de la vis. La résultante v_g coïncide avec la direction du glissement relatif total, et détermine la direction de la composante de frottement fN ; la composante normale de la réaction, perpendiculaire aux surfaces en contact, est dirigée suivant CN, et fait avec la génératrice GG l'angle α (comme dans la vis simple), CN est dans le plan tangent au cylindre le long de la génératrice GG.

On a pour l'ensemble du système, d'après le principe du travail virtuel :

$$P\omega\, r\, dt = Q\omega'\, r'\, dt + fN\, v_g\, dt$$

ou, puisque :

$$v_g = \frac{v''_g}{\cos\beta} = \frac{\omega r}{\cos\alpha\cos\beta}$$

et à cause de l'équation (1) :

$$P = Q\ tg\,\alpha + \frac{fN}{\cos\alpha\ \cos\beta} \qquad (2)$$

L'équation d'équilibre de la vis autour de son axe donne, d'autre part, après simplification :

$$P = N\sin\alpha + fN\cos\beta\cos\alpha$$

d'où

$$N = \frac{P}{\sin\alpha + f\cos\beta\cos\alpha} \qquad (3)$$

L'élimination de N entre les équations (2) et (3) donne :

$$P = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha - f \frac{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}} \tag{4}$$

La valeur de $\cos \beta$ qui figure dans l'équation dépend nécessairement de la grandeur relative des composantes v'_g, v''_g ; on a d'ailleurs

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \beta}}$$

$$tg\ \beta = \frac{v'_g}{v''_g} = \frac{\lambda}{r'} \sin \alpha$$

d'où

$$\cos \beta = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \tag{5}$$

On peut attribuer à λ la valeur moyenne correspondant à la moitié du pas, et trouver une formule approchée qui suffit pour tous les besoins de la pratique ; on se contente souvent d'une approximation plus grossière, en remarquant que $\lambda \sin \alpha$ étant faible en comparaison de r', on a sensiblement

$$\cos \beta = 1$$

ce qui donne

$$P = Q \frac{f + tg\ \alpha}{1 - f\ tg\ \alpha} = Q\ tg\ (\alpha + \varphi)$$

il existe donc entre Q et P la même relation que celle trouvée pour la vis entre K et Q au numéro 62.

L'hypothèse

$$\cos \beta = 1$$

revient à faire abstraction de la vitesse de glissement transversale v'_g

pour ne tenir compte que de la composante v''_g ; dans ce cas, la roue joue, par rapport à la vis, le rôle d'un écrou ordinaire. Cette assimilation est surtout permise dans le cas où le pas est modéré, et où le rayon r' est assez grand, et l'on voit que la vis ne pourrait être commandée par la roue, qu'à la condition d'avoir, comme au numéro 64,

$$\alpha > \varphi$$

73. — *Rendement de la vis tangente.* — Lorsque l'on néglige le glissement transversal, ainsi que le frottement des tourillons, on a comme pour la vis, (numéro 63) :

$$U = \frac{tg\ \alpha}{tg\ (\alpha + \varphi)}$$

Lorsque l'appareil ne peut être réversible, on a forcément

$$\alpha < \varphi$$

c'est-à-dire une valeur assez faible, et le rendement s'abaisse en conséquence. Si, au contraire, le mécanisme est employé comme organe de transmission de mouvement, et si le rapport des vitesses de rotation permet d'adopter une valeur de α plus élevée, le rendement s'élève et atteint son maximum lorsque

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Cette inclinaison de filet étant à peu près égale à 45 degrés, le rapport des vitesses angulaires de la vis et de l'engrenage est sensiblement le même que celui de deux roues droites qui seraient montées sur des axes parallèles situés à la même distance que dans l'appareil considéré; pour atteindre cette inclinaison, il est du reste nécessaire d'employer des vis à filet multiple, ou *à plusieurs entrées.*

74. — Pour tenir compte du frottement sur les tourillons, on applique la méthode exposée au numéro 68 pour les engrenages ordinaires, c'est-à-dire qu'on pose, pour chacun des arbres, une équation d'équilibre

en appliquant à la roue au point M (fig. 78), un effort X, inconnu, provenant de l'action du filet de la vis ; on applique de même à la vis un effort horizontal Y, constituant pour ce système la résistance occasionnée par la roue, on obtient ainsi deux équations renfermant X Y et P ; on admet en outre que X et Y sont liés par la relation (4) qui existe entre les forces P et Q du numéro 72.

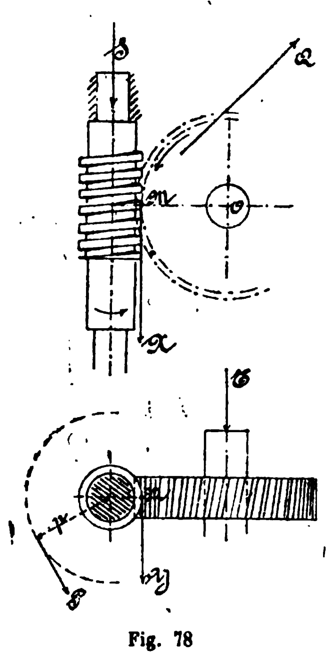


Fig. 78

L'évaluation des moments des frottements sur les tourillons ne saurait donner lieu à aucune difficulté ; on remarquera seulement que les forces N, fN n'étant, pour aucun des deux organes, situées dans un plan perpendiculaire à l'axe, il en résulte, pour les arbres, des poussées longitudinales qui produisent du frottement sur leurs épaulements ; la position des forces N, fN, a aussi une certaine influence sur la grandeur des réactions s'exerçant au pourtour des tourillons.

On aura, très approximativement, pour la poussée S, suivant l'axe de la vis :

$$S = N \cos \alpha - f N \cos \beta \sin \alpha$$

et l'on fera

$$N = \frac{Y}{\sin \alpha + f \cos \beta \cos \alpha}$$

en remarquant que Y remplace ici la force P dans la formule (3)

La poussée T, suivant l'axe de la roue est :

$$T = N \sin \alpha + f N \cos \beta \cos \alpha$$

75. — ***Expériences de William Sellers*** [1]. — On doit à ce constructeur une série d'expériences très importantes, établies dans le but de

1. *Engineering*, 1886 - 1er sem. p. 285-363-581.

déterminer le rendement comparé des engrenages droits et de l'engrenage avec vis tangente, le filet étant incliné sous un angle α qui a varié depuis 5° jusqu'à 45°.

Le travail transmis au premier arbre était mesuré très exactement au moyen d'un dynamomètre, le travail résistant était produit et évalué à l'aide d'un frein; le rapport des deux travaux donne le rendement eu égard à toutes les résistances passives; on a d'abord remarqué que pour chaque valeur de α, le rendement augmente avec la vitesse. Il ne faut voir dans ce résultat que l'une des nombreuses exceptions à la loi du frottement, analogue à celles du numéro 28, car, bien que les parties frottantes aient tourné dans un bain d'huile, les surfaces de contact étaient très réduites en comparaison des pressions transmises, de même que dans les roues de wagon qui patinent.

Les expérimentateurs ont constaté que, pour la même vitesse, le rendement s'élève au fur et à mesure que α augmente, ainsi qu'on le voit par le tableau suivant:

α	NOMBRE DE FILETS	NOMBRE DE TOURS par minute	U
5°	1	200	0.75
7	1	»	0.81
10	1	»	0.86
15	2	»	0.90
20	3	»	0.92
30	4	»	0.95
45	6	»	0.965

Pour des roues droites, le rendement a atteint 0,98; en tenant compte du frottement sur les arbres, on voit que la résistance des dents est à peu près négligeable, les roues étaient taillées, et avaient respectivement 12 et 39 dents.

§ II.

Systèmes dans lesquels se produit la résistance au roulement.

76. — *Rouleaux ou galets libres.* — Afin de diminuer l'effort nécessaire pour déplacer une pièce lourde, on fait parfois usage de rouleaux (fig. 79); on emploie les galets dans des circonstances analogues, pour diminuer la résistance au mouvement.

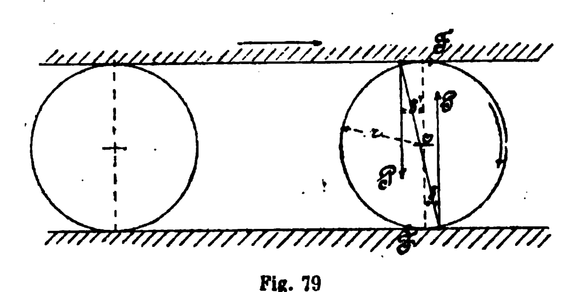


Fig. 79

Chacun des rouleaux peut être isolé, et, lorsque le mouvement est uniforme, les forces sollicitantes se font équilibre, on doit donc avoir

$$F = P\left(\frac{\delta + \delta'}{2r}\right)$$

F est l'effort de traction correspondant à la charge P portée par l'un des rouleaux. On aurait une équation semblable pour chacun des rouleaux considérés, on peut donc écrire :

$$\Sigma F = \frac{\delta + \delta'}{2r} \Sigma P.$$

Les valeurs δ, δ' dépendent de la nature des surfaces en contact, et sont données au numéro 36 ; le poids des rouleaux est négligé.

Exemple : Supposons que la pièce à déplacer présente une surface

de roulement en chêne brut, et repose, par l'intermédiaire de galets en fonte, sur des rails saillants en fer; prenons

$$\Sigma P = 1000 \text{ kil.}$$
$$r = 0.15$$
$$\delta = 0.0012$$
$$\delta' = 0.0102$$

on trouve

$$\Sigma F = 38 \text{ kil.}$$

Il est nécessaire que les axes des rouleaux soient parallèles, sinon la résistance peut être augmentée par les glissements.

77. — Lorsque les surfaces de roulement sont courbes (grues tournantes), les valeurs de δ sont probablement altérées, mais à défaut d'expériences, et surtout si la courbure est faible en comparaison de celle des galets, on peut prendre les mêmes valeurs que pour des surfaces planes. Dans ce cas, les galets sont nombreux et rapprochés, on peut admettre sans grande erreur que les deux galets entre lesquels est

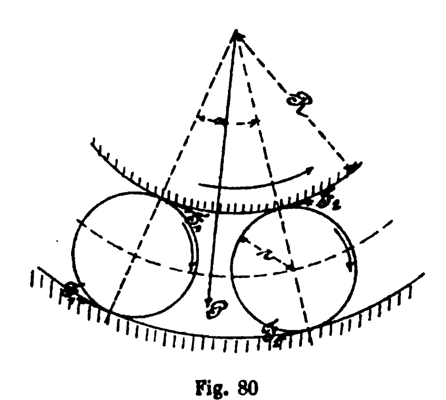


Fig. 80

située la force P, supportent seuls la réaction due à cette force; en désignant par P_1 et P_2 ces réactions, on aura, respectivement, pour chacun des galets (fig. 80):

$$F_1 = \frac{\delta + \delta'}{2r} P_1$$

$$F_2 = \frac{\delta + \delta'}{2r} P_2$$

Et pour l'ensemble des moments résistants par rapport à l'axe de rotation de l'arbre :

$$(F_1 + F_2) R = (\delta + \delta') \frac{R}{2r} (P_1 + P_2)$$

La somme $P_1 + P_2$ est égale à P lorsque cette force passe par le centre de l'un des galets, elle augmente et devient maxima lorsque la force est bissectrice de l'angle α. On a alors

$$P_1 + P_2 = \frac{P}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

valeur qui, toutefois, ne s'écarte pas beaucoup de P.

Ce calcul n'est qu'approximatif, car les valeurs de P_1 et P_2 sont obtenues comme si le système ne subissait aucune déformation, et en supposan que les forces F_1 et F_2 n'existent pas.

Les galets ou les rouleaux peuvent être employés pour des opérations temporaires, dans ce cas, on ne prend aucune précaution pour empêcher leur déplacement accidentel; lorsqu'ils font partie intégrante d'un mécanisme, on a soin, au contraire, de maintenir le parallélisme de leurs axes au moyen de bandes dans lesquelles leurs pivots sont engagés. On peut citer comme principaux exemples de l'emploi des galets: les chariots de dilatation des poutres de ponts, les chariots de roulement à galets coniques employés dans certains ponts tournants, ainsi que les tourelles des forts et des navires cuirassés, les pivots des poulies de gréement, la suspension des cloches lourdes.

78. — Les galets se déplacent par rapport à la plate-forme roulante, ils ne peuvent donc servir que pour des mouvements circulaires, ou pour des mouvements rectilignes de peu d'amplitude, aussi les véhicules ordinaires sont toujours munis de roues dont l'*axe de rotation* est fixe par rapport à la caisse; le mot *axe de rotation* est pris ici dans son sens géométrique, c'est-à-dire abstraction faite du dispositif qui sert à assurer la fixité, et qui varie suivant les circonstances; ainsi, dans les véhicules circulant sur chaussées, et qui doivent passer dans des courbes de faible rayon, les mouvements des deux roues d'un même essieu sont indépendants, les moyeux frottent intérieurement sur les fusées fixes de l'essieu;

la force motrice est dirigée de manière à orienter le mouvement dans le sens voulu.

Pour les wagons roulant sur les voies ferrées, les roues sont calées deux à deux sur un même essieu, et la caisse repose sur les fusées de celui-ci par l'intermédiaire de coussinets fixes ; il est clair que, dans les deux cas, l'axe de rotation est fixe par rapport au véhicule. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les deux roues appartenant à un même essieu, sont concentrées dans le plan de symétrie qui renferme le centre de gravité des poids à transporter, ainsi que l'effort de traction ; nous négligeons, pour plus de simplicité, le poids mort des roues, et nous supposons que, dans chaque cas, la force verticale P est déterminée, en grandeur et en position, en tenant compte du poids de la caisse.

79. — ***Véhicule en équilibre sur un seul essieu.*** — Lorsque les fusées sont fixes dans le moyeu (fig. 81); la résultante de la charge P et de l'effort de traction F doit passer tangentiellement à la circonférence-

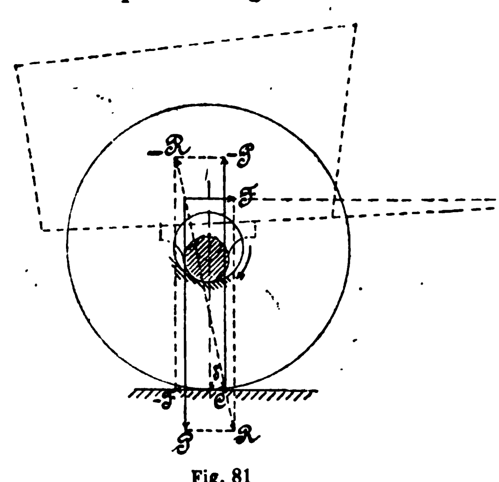


Fig. 81

enveloppe se rapportant au moyeu ; le poids de la roue étant négligé, cette résultante R doit être équilibrée par la réaction qui s'exerce au point C sur la roue, et dont les composantes suivant la verticale et l'horizontale sont donc — P et — F respectivement ; puisque, au surplus, la réaction — R doit coïncider avec R, celle-ci doit être tangente à la circonférence-enveloppe du moyeu, circonférence dont le rayon est $f'\rho$.

ρ est le rayon intérieur du moyeu.

On a pour les forces appliquées en C, à la roue :

$$R f' \rho = Fr \div P\delta$$

ou

$$(1) \qquad f' \rho \sqrt{P^2 + F^2} = Fr - P\delta$$

qui permet de trouver F en fonction de P.

On peut simplifier la résolution de l'équation, et obtenir néanmoins une approximation suffisante pour tous les besoins de la pratique, en substituant au radical l'expression linéaire de Poncelet [1]:

$$\alpha P + \beta F$$

L'ordre des grandeurs relatives P et F ne laissant ici aucun doute, on fera

$$\alpha = 0.96$$
$$\beta = 0.4$$

et il en résulte :

$$F = \frac{\delta + 0.96 f' \rho}{r - 0.4 f' \rho} P$$

La même formule est applicable au cas où la caisse repose par des coussinets fixes sur les fusées d'un essieu mobile avec les roues (fig. 82), ρ désigne alors le rayon des fusées.

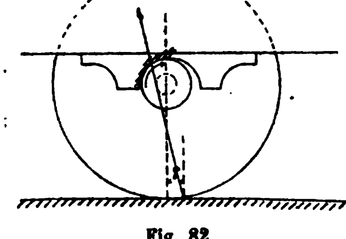


Fig. 82

On peut encore, en remarquant que F^2 est négligeable à côté de P^2, dans l'équation (1) se contenter de la valeur approchée :

$$(2) \qquad F = f' \frac{\rho}{r} P + P \frac{\delta}{r}$$

1. On emploie fréquemment ce mode de résolution dans les problèmes de mécanique appliquée chaque fois que, dans les équations, figure une réaction à exprimer en fonction de ses deux composantes rectangulaires, c'est-à-dire qu'on pose :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \alpha X + \beta Y$$

On prend $\alpha = \beta = 0,83$ lorsque l'ordre de grandeur de X et Y n'est pas connu, dans ce cas, l'approximation est d'environ $\frac{1}{6}$. Dans le cas particulier où l'on sait que $X > Y$, on pose $\alpha = 0,96$
$\beta = 0,4$

et le résultat est exact à moins de $\frac{1}{25}$ près.

le premier terme provient du frottement de la fusée, le second est la résistance au roulement proprement dite, et peut s'évaluer en prenant pour δ les valeurs données aux numéros 36, 40 et 41.

80. — L'équilibre indiqué est nécessaire lorsqu'on veut éviter toute action verticale sur l'attelage, mais il ne peut être obtenu que par tâtonnements, et il est du reste instable, car tout changement accidentel dans la valeur de δ obligerait à déplacer la charge P. Lorsque le point de rencontre des forces P et F ne se trouve pas situé sur la ligne menée du point C tangentiellement à la circonférence-enveloppe, l'équilibre ne peut être obtenu qu'en faisant porter par le cheval une composante p de la réaction due au poids P. On a alors par une équation de moments (fig. 83)

$$p = \frac{ab}{bd} P$$

ce qui permet d'achever le polygone des forces, et de trouver F (fig. 84).

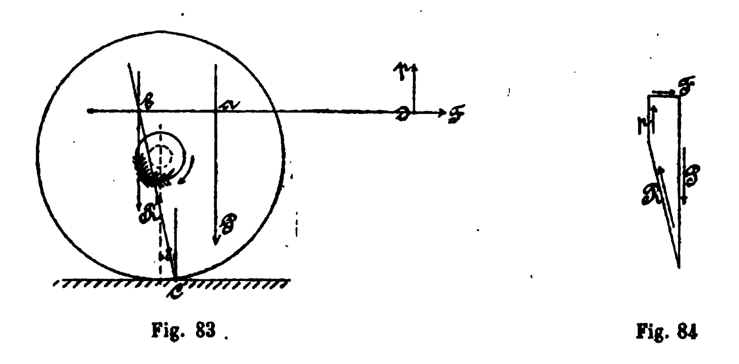


Fig. 83 . Fig. 84

Dans l'attelage des bêtes de somme, il est bon de répartir la charge de manière à obtenir une certaine valeur de p ; en aucun cas, la charge ne pourrait être appliquée à gauche du point b, car l'animal tendrait à être soulevé, et serait dans des conditions mauvaises pour prendre appui sur le sol.

81. — *Chariot à deux essieux.* — Les points d'application de R et R' (fig. 85) étant connus par les distances δ et δ', on peut obtenir, dans

le polygone des forces, les directions R et R' des réactions (fig. 86); les côtés p et p' se déterminent par les conditions

$$p + p' = P$$
$$\frac{p}{p'} = \frac{ad}{ab}$$

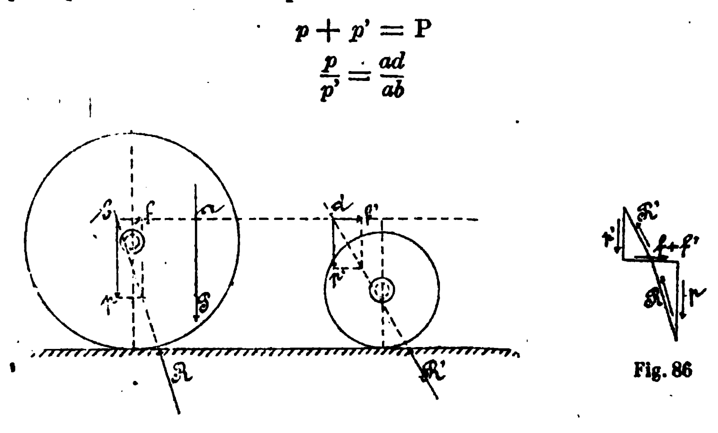


Fig. 85

Fig. 86

L'effort de traction est fourni par le côté horizontal du polygone des forces.

On remarquera qu'il y a avantage à faire porter la charge sur la grande roue, si l'on admet que δ est constant; en réalité les chariots sont construits de manière à ce qu'il en soit ainsi, l'avant train pivotant ne supporte que la charge nécessaire pour assurer le mouvement de direction; les roues de l'avant train devant du reste se loger sous la caisse lorsque le véhicule passe dans une courbe de petit rayon, le faible diamètre que l'on donne à ces roues est une nécessité de construction.

En employant pour chacune des roues la formule (2) du numéro 79, on trouverait, pour l'effort de traction total:

$$F = (f' \rho + \delta)\left(\frac{p'}{r'} + \frac{p}{r}\right)$$

Morin a admis que les charges p et p' sont réparties proportionnellement aux rayons des roues, c'est-à-dire qu'on a d'ordinaire:

$$p' = \alpha r'$$
$$p = \alpha r$$

d'où, par addition

$$\alpha = \frac{P}{r + r'}$$

la formule devient alors

$$F = \frac{2\,(f' \rho + \delta)}{r + r'}\,P \qquad (3)$$

Lorsque $r' = r$, on retombe sur la formule (2) du numéro 79; celle-ci est applicable, par conséquent, aux véhicules à deux essieux, lorsque les roues sont d'égal diamètre.

82. — Le rapport $\frac{F}{P}$ se nomme coefficient de traction; les expériences de Morin (1837 à 1841), faites à l'aide d'un dynamomètre de traction, ont établi que ce coefficient ne varie pas, pour un même véhicule, avec la charge, et qu'en passant d'un véhicule à l'autre, il est en raison inverse du diamètre des roues, ce qui tend à prouver la constance de δ, car $f'\rho$ ne varie que d'une quantité insignifiante lorsqu'on passe d'un moyeu à l'autre.

La vitesse n'affecte pas la valeur de $\frac{F}{P}$ lorsque les chaussées sont unies; sur les routes pavées, au contraire, le coefficient de traction augmente avec la vitesse, et d'autant plus que le pavage est moins uni; le raisonnement montre qu'il doit en être ainsi, car toute aspérité augmente d'autant la valeur de δ, le travail dépensé pour faire gravir à la roue une suite de plans inclinés n'est que partiellement régénéré à la descente, puisqu'il s'en perd par le choc une partie d'autant plus grande que la vitesse est plus considérable.

Les ressorts employés pour diminuer le cahotage des véhicules exercent une influence favorable sur l'effort de traction, car ils diminuent l'intensité des chocs; leur effet est surtout sensible sur les chaussées raboteuses, et pour l'allure à grande vitesse.

	δ	VALEURS DU COEFFICIENT DE TRACTION D'APRÈS MORIN						
		Chariots à deux essieux		Tombereaux		Voiture des messageries $r+r' = 1^m15$, $\rho = 0,032$		
		$r = 0.45$ $r' = 0.75$ $\rho = 0.032$	$r = 0.55$ $r' = 0.85$ $\rho = 0.032$	$r = 0.80$ $\rho = 0.032$	$r = 1.00$ $\rho = 0.032$	au pas	au trot	trot rapide
Chaussée en empierrement en bon état, sèche et unie. . .	0.01	$\frac{1}{49.9}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{60.2}$	$\frac{1}{82.8}$	$\frac{1}{47.6}$	$\frac{1}{40.9}$	$\frac{1}{40.9}$
Pavage en grès à l'état sec.	0.008	$\frac{1}{59.6}$	$\frac{1}{69.5}$	$\frac{1}{79.9}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{57.1}$	$\frac{1}{34.1}$	$\frac{1}{32.7}$
Pavage en grès, humide et boueux. . . .	0.011	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{53.5}$	$\frac{1}{61.2}$	$\frac{1}{76.5}$	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{32.9}$	$\frac{1}{29.2}$
Tablier en bois de pont.	0.012	$\frac{1}{40.8}$	$\frac{1}{49.8}$	$\frac{1}{56.9}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{1}{40.8}$	$\frac{1}{40.8}$	»

Tous les coefficients ci-dessus résultent d'expériences, les valeurs de δ portées dans la première colonne sont ensuite déduites de la formule (3) en prenant

$$f' = 0{,}065$$

Les jantes avaient en général dans ces expériences une largeur de $0^m{,}10$ à $0^m{,}12$.

83. — Les résultats obtenus par Morin sont à peu près confirmés par de nouvelles et récentes expériences faites par la Compagnie des Omnibus de Paris; pour une voiture-omnibus pesant de 3,000 à 4,000 kilogrammes, l'effort de traction moyen, par tonne de charge, a été mesuré au moyen d'un dynamomètre; on a trouvé respectivement:

Sur le macadam. .	21 à 33 kil.
Sur le pavé . . .	14 à 22

ce qui porte le coefficient de traction aux valeurs suivantes:

Sur le macadam. .	$\frac{1}{47.5}$ à $\frac{1}{30}$
Sur le pavé . . .	$\frac{1}{71}$ à $\frac{1}{45}$

84. — *Wagons roulant sur les voies ferrées.* — Les causes qui produisent la résistance au roulement des véhicules sur les routes ordinaires agissent avec moins d'intensité dans les chemins de fer, les surfaces en contact étant plus dures et plus parfaites; d'autre part, les wagons sont soumis, par suite de leur construction, à des causes spéciales de résistance, parmi lesquelles il faut surtout compter le frottement latéral des boudins des roues, et le frottement en courbe.

Le frottement latéral étant accidentel, il est impossible de déterminer la pression qui le produit, et par conséquent de le calculer; la résistance en courbe, au contraire, à fait l'objet de recherches théoriques très complètes [1].

1. Léon Pochet. *Théorie du mouvement en courbe sur les chemins de fer,* Paris Dunod- 1882.

Enfin, pour les trains rapides, la résistance de l'air occasionne un sérieux accroissement de résistance, dont il est possible aussi de tenir compte.

Si l'on se borne à considérer les causes de résistance ordinaires, la formule (3) du numéro 81 devient:

$$F = \frac{f'\rho + \delta}{r} P$$

qui donne pour l'effort de traction, en kilogrammes par tonne:

$$F = 1000 \frac{f'\rho + \delta}{r}$$

On a, d'ordinaire

$$r = 0.45$$
$$\rho = 0{,}045$$

f' dépend du mode de graissage; les expériences de M. Thurston, faites principalement dans des conditions analogues à celles où se trouvent les fusées, permettent de supposer qu'avec de bonnes huiles, f' ne s'élève pas à plus de 0,01; la part afférente à chacune des causes de résistance serait ainsi, après calcul:

Résistance due au frottement des fusées — 0,46 F
Résistance au roulement proprement dit — 0,54 F.

Ces chiffres permettent de voir, grossièrement, que le frottement des fusées occasionne une résistance comparable à celle due à la pénétration du bandage dans le rail.

Les formules de Villemain, Guebhardt et Dieudonné fournissent, pour le graissage à l'huile, à la vitesse de 10 kilomètres à l'heure:

$$F = 2^{k},15$$

Dans ces conditions, et avec la valeur $f' = 0{,}01$ on trouve

$$\delta = 0^{m},00052$$

Pour le graissage à la graisse, on a d'après les mêmes auteurs

$$F = 2^{k},80$$

en adoptant la valeur ci-dessus de δ évidemment indépendante du système de graissage, on trouve

$$f' = 0.016$$

résultat fort vraisemblable, et qui s'accorde avec certaines expériences sur les propriétés lubrifiantes de la graisse.

Il serait cependant bien difficile de séparer les divers éléments de la résistance; on admet donc que la résistance totale sur une voie droite établie en palier comprend :

1° Un terme indépendant de la vitesse, et proportionnel à P, que l'on peut attribuer aux deux causes déjà analysées;

2° Un terme dû aux mouvements irréguliers, aux chocs et aux vibrations, dont l'influence augmente avec la vitesse; ce terme est aussi proportionnel à P;

3° Enfin un terme dû à la résistance de l'air, et qui dépend, à la fois, de l'ensemble des sections transversales rencontrées par le vent, et du carré de la vitesse relative (1); dans les conditions moyennes, l'air étant immobile, la vitesse relative du vent n'est autre que la vitesse du train; quant à la section transversale, on peut, sans grande erreur la supposer constante.

On a ainsi:

$$F = \alpha P + \beta PV + \gamma V^2$$

ou

$$\frac{F}{P} = \alpha + \beta V + \gamma \frac{V^2}{P}$$

1. La théorie du choc d'une veine fluide contre un plan, montre que l'action du vent est proportionnelle au carré de la vitesse relative; toutefois, les expériences de O. T. Crosby, faites aux Etats-Unis, dans des conditions de vitesse comparables à celles des trains les plus rapides, ont fourni une résistance proportionnelle à la vitesse. Réduites en mesures métriques, la résistance due à l'air pour une section S^{m2} serait :

$$0.436\ SV$$

V est la vitesse en kilomètres à l'heure; ce terme s'identifie avec celui qui figure dans la formule de de Pambour, lorsque

$$V = 87 \text{ kilomètres à l'heure.}$$

Pour des vitesses inférieures, il donne des valeurs plus fortes; au-dessus, il donne des valeurs plus faibles.

$\frac{F}{P}$ est le coefficient de traction, il est toujours évalué en kilogrammes par tonne de train, et si on l'appelle T, on a

$$T = \alpha + \beta V + \gamma \frac{V^2}{P}$$

Les valeurs α, β et γ peuvent se déterminer par un nombre assez grand d'expériences ; pour les trains de petite vitesse, le dernier terme est supprimé ; certaines formules n'ont pas le terme βV.

Voici quelques-unes des formules les plus employées, P exprime le poids du train en tonnes, T est l'effort de traction en kilogrammes par tonne, V est la vitesse en kilomètres à l'heure.

85. — *Anciennes formules.* — *Formule de de Pambour* [1]

$$T = 2.69 + \frac{0.005064\ SV^2}{P}$$

S est la surface effective du train en mètres carrés, on l'obtient en ajoutant à la section la plus grande, une surface de $0^{m^2},93$ pour chacun des véhicules ;

Expériences de Gouin et Le Chatelier [1].

V	T	P
38.38	4.06	41
49.17	6.56	41
56.37	8.13	22

Ces expériences ont été faites au moyen d'un dynamomètre.

1. Le Chatelier, *Guide du mécanicien.*

Expériences de Gooch sur la voie large du Great-Western.

V	T	P
21.1	3.43	100
32.2	3.87	»
72.4	7.26	»
91.7	9.94	»
92.2	10.77	»
98.1	10.07	»

Formule de Harding

$$T = 2.72 + 0.094\ V + 0.00484\ \frac{NV^2}{P}$$

N est la surface de front du train; cette formule est applicable aux vitesses supérieures à 60 kilomètres seulement, elle ne convient qu'aux trains de voyageurs, P ne peut descendre en-dessous de 20 tonnes, sinon l'influence du dernier terme deviendrait excessive.

86. — ***Formules de Villemain, Guebhardt et Dieudonné*** [1]:

1° Trains de marchandises, ayant une vitesse inférieure à 30 kilomètres,

Pour le graissage à l'huile : $T = 1.65 + 0.05\ V$
Pour le graissage à la graisse : $T = 2.30 + 0.05\ V$

2° Trains omnibus, ayant une vitesse de 30 à 50 kilomètres,

$$T = 1.80 + 0.08\ V + 0.009\ \frac{NV^2}{P}$$

3° Trains directs, ayant une vitesse de 50 à 65 kilomètres,

$$T = 1.80 + 0.08\ V + 0.006\ \frac{NV^2}{P}$$

1. *Mémoires* de la Société des Ingénieurs Civils - 1867.

4° Trains express, marchant à 70 kilomètres et plus,

$$T = 1.80 + 0.14\ V + 0.006 \frac{NV^2}{P}$$

Toutes les valeurs numériques données pour T, ainsi que les coefficients des formules ci-dessus, se rapportent aux wagons exclusivement; les machines locomotives sont soumises, à cause du frottement de leur mécanisme, à une résistance supplémentaire que nous ne pouvons étudier ici. Enfin, il s'agit toujours, dans ce qui précède, d'une voie de niveau, sinon la gravité donnerait lieu à une composante qui viendrait diminuer ou augmenter l'effort de traction.

87. — *Résistance sur les tramways et les petites lignes industrielles.* — Le coefficient de traction augmente lorsque le diamètre des roues diminue; les petites voies ne présentent pas non plus autant de stabilité que les chemins de fer ordinaires.

M. A. Evrard [1] a déduit d'un assez grand nombre d'expériences les valeurs de F qui se rapportent aux berlines employées dans l'intérieur des mines, sur des voies de $0^m,60$ d'écartement; pour des roues bien graissées et en bon état, F est en moyenne de 16 kilogrammes par tonne, mais peut descendre jusqu'à 10 kilogrammes avec un matériel soigné et s'élever à 25 kilogrammes lorsque l'entretien laisse à désirer; la vitesse était au maximum de $3^m,50$ par seconde.

Les méthodes employées par M. Evrard méritent de fixer l'attention, par le degré de précision qu'elles permettent d'atteindre. Dans une première série d'expériences, les wagonnets descendaient librement sur un plan incliné d'une hauteur H, et remontaient sur une rampe, en perdant peu à peu leur vitesse; ils s'arrêtaient à la hauteur $H - h$; la longueur du parcours était connue, et le travail résistant était évalué en multipliant le poids total par h.

Dans une autre série d'expériences, le travail résistant total, sur un parcours en palier, a été mesuré au moyen de la force vive acquise à un moment donné, à partir duquel les petits trains de berlines étaient abandonnés à eux-mêmes; le parcours était mesuré.

On voit que, pour tirer parti de ces expériences, il est nécessaire de supposer que l'effort de traction est indépendant de la vitesse, ce qui

1. *Revue Universelle des Mines*, 2e série, t. VI, pages 374 et 702.

est sensiblement vrai pour des mouvements peu rapides; il convient de remarquer aussi que la force vive des roues, doit, à raison de leur double mouvement, faire l'objet d'une évaluation spéciale.

Quoiqu'il en soit, on peut tenir comme acquis que les wagonnets roulant sur voies étroites exigent, pour la même charge totale, un effort de traction au moins cinq fois plus considérable que les véhicules circulant sur la voie normale; la diminution de l'effort de traction lorsque la voie s'élargit avait déjà été démontrée par les expériences de Gooch, sur la voie large du Great-Western.

Quant aux voitures de tramways, la plupart des expériences [1] conduisent à leur assigner une résistance de 10 kilogrammes par tonne, à la vitesse de 10 kilomètres à l'heure, et sur une voie en bon état, mais l'effort nécessaire au démarrage peut atteindre facilement 50 kilogrammes.

§ III.

Systèmes comportant des liens flexibles.

88. — *Du treuil.* — Considérons d'abord le système (fig. 87) dans lequel la résistance Q est appliquée au tambour par l'intermédiaire

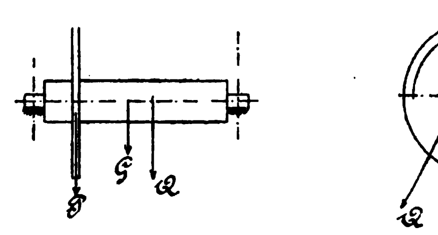


Fig. 87

d'une corde, la puissance P agissant suivant une direction constante et à la distance p de l'axe.

1. Sérafon, les *Tramways et les chemins de fer sur route.* Paris. E. Bernard et Cie 1882.

Soient q_1 le rayon du tambour,
G, le poids mort du treuil,
ρ_1, ρ_2, les rayons des tourillons,
f, le coefficient de frottement.

Les coussinets sont supposés réduits à une tranche mince supportant les tourillons au milieu de leur longueur; lorsque la rotation se produit, le frottement qui se développe sur chaque tourillon agit dans un plan normal à l'axe de rotation, les réactions totales R_1 et R_2 sont donc situées chacune dans un plan normal à l'axe, et appliquées au milieu de la longueur des tourillons.

Le système rendu libre ne peut que tourner autour de son axe, et les réactions R_1 et R_2 doivent être déterminées en conséquence, il faudra donc écrire en tenant compte de la raideur par la formule ordinaire [1]:

$$(1) \qquad Pp = Qq + \frac{1}{2}(A + BQ) + f' \rho_1 R_1 + f' \rho_2 R_2$$

Les forces R_1 et R_2 peuvent s'évaluer en fonction de leurs composantes suivant deux axes rectangulaires:

$$R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$
$$R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$$

Les quatre composantes inconnues seront déterminées par les deux équations d'équilibre de moments qui n'ont pas encore été écrites, et par deux équations d'équilibre de translation suivant des axes parallèles à X_1 X_2 et à Y_1 Y_2; la troisième équation de translation n'existe pas, puisque toutes les forces sont normales à l'axe du treuil.

On voit que les composantes des réactions, R_1 R_2, sont nécessairement

1. Si l'on emploie la formule monome de M. de Longraire (43) on remplacera le moment additionnel

$$\frac{1}{2}(A + BQ)$$

par

$$M\,Q$$

en faisant

$$M = 0{,}02p$$

(p étant ici le poids de la corde par mètre courant)

des fonctions de la force inconnue P, et qu'ainsi la résolution de l'équation (1) présente quelque difficulté, puisque P figure sous des radicaux.

On peut se contenter, comme dans tous les problèmes de l'espèce, d'une solution approchée, obtenue en calculant d'abord la valeur numérique de P abstraction faite des termes de frottement; on calcule ensuite les valeurs de R_1 et R_2 qui ne dépendent plus que des forces connues, parmi lesquelles se trouve la valeur approchée de P; on peut ainsi, par une substitution dans l'équation (1) obtenir une valeur de P plus approchée que la première, etc....

Il est plus avantageux de se servir de la méthode de Poncelet donnée au n° 79, et qui consiste à remplacer chaque radical par une expression linéaire approchée.

Lorsque les rayons ρ_1 ρ_2 sont égaux, cette méthode conduit à une simplification notable, car elle donne immédiatement

$$(2) \qquad Pp = Qq + \frac{1}{2}(A + BQ) + f'\rho\alpha(X_1 + X_2) + f'\rho\beta(Y_1 + Y_2)$$

on fait $\alpha = \beta = 0{,}83$.

On obtient directement les valeurs de $X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ par les deux équations de translation.

Il est à remarquer cependant que, si l'ordre de grandeur de X_1 et Y_1 est connu, de même que celui de X_2 et Y_2, et si l'on veut, pour obtenir une approximation plus grande, faire usage de coefficients α et β différents, la simplification n'a lieu que si l'on a

$$X_1 > Y_1 \text{ avec } X_2 > Y_2$$

ou

$$X_1 < Y_1 \text{ avec } X_2 < Y_2$$

car, de cette manière, les composantes parallèles au même axe figurent toujours par leur somme.

Enfin, si une partie des forces se trouve en dehors des appuis, il peut être nécessaire, tout en adoptant le mode de résolution approché ci-dessus, d'obtenir séparément les valeurs de X_1, X_2, Y_1, Y_2, parce que les équations de translation ne fournissent, dans le cas où les composantes X_1 et X_2 ou Y_1 et Y_2 sont de signes contraires, que la somme algébrique des deux forces, tandis que c'est leur somme arithmétique qui doit figurer dans l'équation (2).

89. — Le treuil est presque toujours commandé par engrenages, au moyen d'un nombre plus ou moins grand d'arbres intermédiaires; on emploie alors, pour passer d'un système au système suivant, la méthode indiquée au n° 68; les réactions sur les tourillons sont calculées en employant la méthode approchée de Poncelet; lorsque le dernier arbre est mû à bras d'hommes au moyen d'une ou de deux manivelles, la direction de la force motrice appliquée à ces manivelles est variable à chaque instant, et, par conséquent, la grandeur de la force motrice l'est aussi, puisque ce changement de direction entraîne une modification dans la grandeur des réactions; la force motrice devrait alors être calculée pour chaque position. Dans les problèmes pratiques, il suffit de chercher la valeur de la force motrice pour un certain nombre de positions équidistantes des manivelles, et d'en déduire l'effort moyen.

90. — *Poulie simple.* — La poulie fixe, (fig. 88), peut être considérée comme un treuil simplifié; désignons par

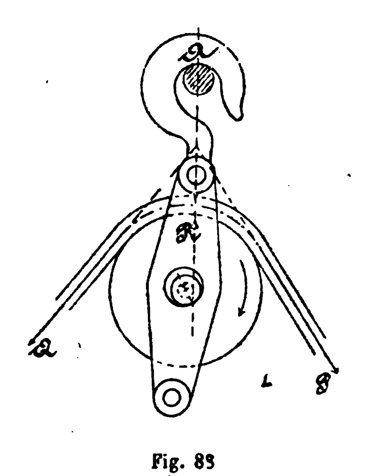


Fig. 88

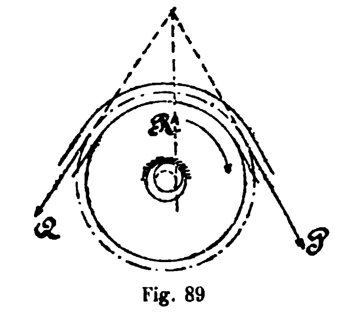


Fig. 89

r, le rayon mesuré sur l'axe de la corde,

ρ, le rayon du pivot, mobile avec la poulie,

dans le cas où le pivot est fixe (fig. 89), ρ désigne le rayon de l'œil de la poulie.

On a :

$$Pr = Qr + MQ + f' \rho R$$

R peut s'évaluer en fonction des composantes de P et de Q ; le poids propre de la poulie est négligé.

Lorsque les brins sont parallèles, on a en outre :

$$P + Q = R$$

ce qui donne :

$$P = \frac{M + r + f' \rho}{r - f' \rho} Q$$

ou

$$P = \alpha Q$$

91. — La poulie mobile (fig. 90), donne

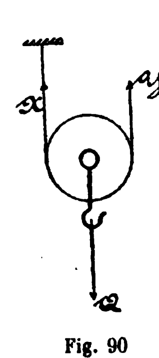


Fig. 90

$$Y = \alpha X$$
$$X + Y = Q$$

équations qui, résolues, permettent de calculer Y

$$Y = \frac{\alpha}{1 + \alpha} Q$$

ou, en tenant compte de la valeur de α :

$$Y = \frac{M + r + f' \rho}{M + 2r} Q$$

92. — Les combinaisons de poulies se rattachent, comme on sait, à l'un ou l'autre des systèmes représentés (fig. 91 et 92) ; ce dernier, connu sous le nom de mouffle, ou palan, est le plus employé.

Dans le cas de la figure 91, si n désigne le nombre des poulies, on a :

$$P = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)^n Q$$

nous supposons que les poulies et pivots ont le même diamètre, et que toutes les cordes employées sont de même grosseur.

Dans la mouffle, on a :

$$T_1 = \alpha T_0$$
$$T_2 = \alpha T_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{2n-1} = \alpha T_{2n-2}$$
$$P = \alpha T_{2n-1}$$

On a, en outre

$$T_0 + T_1 + \ldots\ldots T_{2n-1} = Q$$

Les équations ci-dessus, au nombre de $2n + 1$, permettent de déterminer P et les $2n$ tensions inconnues.

On trouve

$$P = \frac{(\alpha - 1)\ \alpha^{2n}}{\alpha^{2n} - 1}\ Q$$

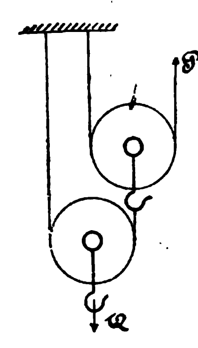


Fig. 91

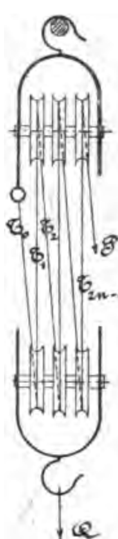


Fig. 92

93. — *Palan différentiel.* — Cet appareil (fig. 93), connu aussi sous le nom de poulie de Weston, exige l'emploi d'une chaine et de poulies à empreintes; l'effet multiplicateur est exprimé par

$$\frac{2R}{R - r}$$

On peut, par la réduction de $R - r$, l'augmenter autant qu'on le veut ; pour une charge Q, appliquée au crochet, la tension qui sert à déterminer la grosseur de la chaine est $\frac{Q}{2}$, approximativement, tandis que, pour un palan, la chaine ne doit résister, lorsqu'on fait abstraction des résistances passives, qu'à l'effort $\frac{Q}{2n}$.

Si l'on abandonne à elle-même la poulie de Weston, le mouvement tend à se produire en sens inverse sous l'effet de Q ; la tension T_0 devient donc plus grande que T_1, et, bien qu'elle agisse sur le rayon r de la

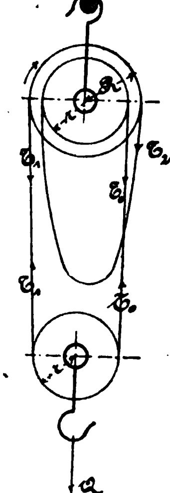


Fig. 93

poulie différentielle, son moment peut équilibrer celui de T_1, à la condition que le rapport $\frac{R}{r}$ ne soit pas trop grand ; l'appareil possède alors la propriété de ne pas être réversible.

La poulie de Weston peut être actionnée au moyen d'un engrenage et d'une vis tangente ; dans ce cas, la non-réversibilité peut être obtenue par l'inclinaison du filet de la vis.

94. — On ne peut évidemment appliquer aux chaînes les théories de la raideur des cordes ; la résistance à laquelle donnent lieu les chaînes ordinaires où à maillons articulés lorsqu'elles passent sur une poulie, est due à la rotation relative des maillons successifs au moment de l'enroulement et du déroulement. Le travail nécessaire pour vaincre le frottement est emprunté à la force motrice P.

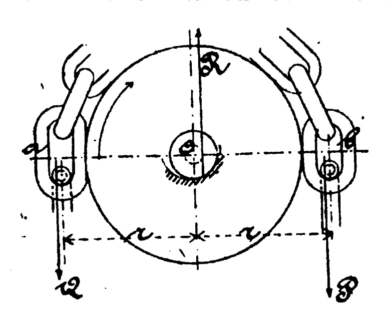


Fig. 94

Soit r, (fig. 94) le rayon de la poulie augmenté de la demi-largeur de la chaîne,

ρ le rayon des tourillons,

f leur coefficient de frottement sur les coussinets,

ρ_1 le rayon du fer de la chaîne (ou, s'il s'agit d'une chaîne de Galle, le rayon des pivots),

f_1 le coefficient de frottement fer sur fer.

Le bras de levier de Q par rapport au point d'application de la réaction R devient :

$$r + f'\rho + f_1'\rho_1$$

tandis que celui de la force motrice, P, est diminué, et prend la valeur

$$r - f'\rho - f_1'\rho_1$$

Comme les chaînes peuvent être rugueuses et non graissées, Hermann [1] admet pour f_1 la valeur 0,20

1. Hermann. *Statique graphique des mécanismes.*

On obtient pour l'équilibre :

$$(1) \qquad P = \frac{r + f' \rho + f_1' \rho_1}{r - f' \rho - f_1' \rho_1} Q$$

Il est à remarquer que les maillons, ayant une certaine longueur, forment des éléments polygonaux, et qu'ainsi, r varie un peu, tant à l'enroulement qu'au déroulement; la relation établie n'est donc vraie que pour une position particulière. On a néanmoins, par l'équation du travail virtuel, en appelant :

l le pas de la chaîne, c'est-à-dire la longueur des éléments polygonaux qu'elle forme lorsqu'elle est enroulée,

α, l'angle au centre correspondant à cette longueur l, et qui représente aussi l'angle dont les deux maillons tournent l'un par rapport à l'autre, aussi bien à l'enroulement qu'au déroulement :

$$(2) \qquad P = \frac{l + f' \rho\alpha + f_1' \rho_1 \alpha}{l - f' \rho\alpha - f_1' \rho_1 \alpha} Q$$

avec la condition :

$$l = 2r \, tg \frac{\alpha}{2}$$

Si l'angle α est faible, c'est-à-dire si la poulie est grande en comparaison des maillons, on a approximativement :

$$l = r\alpha$$

et les équations (1) et (2) deviennent identiques.

La théorie ci-dessus s'applique aux chaînes qui s'enroulent librement sur les poulies, et qui n'ont aucune tendance à glisser, soit qu'il y ait peu de différence entre les tensions des deux brins, ou que la chaîne soit fixée au tambour comme dans les treuils des grues; si la tendance à glisser existe, comme dans la poulie de Weston, elle ne peut être combattue que par les roues à noix ou les poulies à empreintes, et, dans ce cas, les maillons sont soumis au frottement à l'instant où ils se logent dans les creux ou mâchoires des couronnes, ou bien à l'instant où ils se dégagent de ces creux, suivant que c'est l'un ou l'autre des systèmes qui est moteur.

95. — ***Frottement d'un lien flexible sur un tambour fixe.*** — Dans les systèmes rencontrés jusqu'ici, et qui comportent l'emploi de liens flexibles, ceux-ci sont employés pour modifier la direction des forces ; les changements de tension qui résultent de la raideur sont accidentels ; lorsque l'on met en jeu la tendance au glissement, le frottement se manifeste et donne lieu à une modification notable dans la grandeur des tensions.

Considérons par exemple le cas d'un tambour fixe (fig. 95), et d'un lien (corde, courroie, lame en acier etc.,) se déplaçant à sa surface, dans

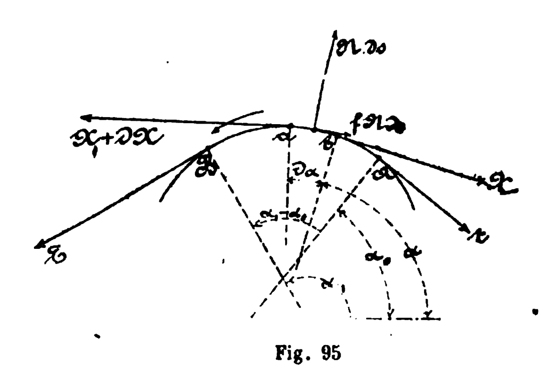


Fig. 95

le plan de sa section droite ; dans l'état de mouvement uniforme, il s'établit un équilibre entre les tensions T, t, et nous allons chercher la relation qui existe entre ces forces. Pour y arriver, isolons un élément ab de longueur ds, et introduisons les tensions X, $X + dX$, qui s'exercent aux deux extrémités de l'élément.

Soit N la réaction normale du cylindre, par unité de longueur de l'élément ; lorsque le mouvement uniforme se produit, on a :

$$dX = f N \, ds \qquad (1)$$

$$X \, d\alpha = N \, ds \qquad (2)$$

d'où

$$\frac{dX}{X} = f \, d\alpha$$

ou encore, après intégration :

$$\frac{T}{t} = e^{f(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

$\alpha_1 - \alpha_0$ est l'angle des deux rayons vecteurs menés aux points A et B de l'arc embrassé.

La formule reste la même, lorsque le contour du cylindre présente sur une partie de son périmètre une courbure rentrante, comme dans la figure 96, car la tension n'est pas modifiée de *a* en *b*, on peut donc

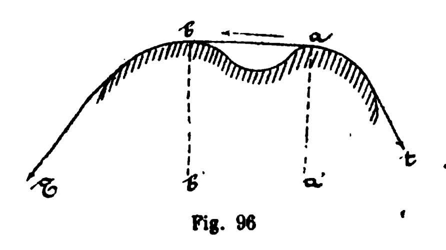


Fig. 96

supprimer la partie du tambour comprise entre les plans *aa'* et *bb'*. Dans le cas d'un cylindre à profil circulaire, si l'on désigne l'arc embrassé par *s*, et le rayon par *r*, on a :

$$\frac{T}{t} = e^{\frac{fs}{r}} \tag{3}$$

Au lieu de se mouvoir sur un cylindre, le lien flexible peut être contenu dans une gorge à profil triangulaire (fig. 97), désignons alors par β l'angle de la gorge ; la réaction N*ds* est remplacée par ses deux composantes N'*ds*, appliquées aux points *m*, et dont chacune est égale à

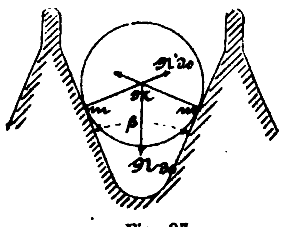


Fig. 97

$$\frac{\mathrm{N}\,ds}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

pour l'élément *ds*, chacune de ces réactions entraine un frottement

$$\frac{f\mathrm{N}\,ds}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

L'équation (1) se modifie et devient :

$$(1') \qquad dX = \frac{fN\,ds}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

La combinaison des équations (1') et (2) donne, après intégration :

$$\frac{T}{t} = e^{\frac{f(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin\frac{\beta}{2}}}$$

ou, s'il s'agit d'une poulie circulaire :

$$(4) \qquad \frac{T}{t} = e^{\frac{fs}{r\sin\frac{\beta}{2}}}$$

Les relations (3) ou (4) donnent le rapport qui existe entre les tensions T et t lorsque le glissement se produit ; il peut arriver que T n'atteigne pas la valeur donnée par ces équations, dans ce cas, et malgré la différence qui peut exister entre T et t, le glissement ne saurait avoir lieu.

Le rapport $\frac{T}{t}$ est fortement influencé, d'abord par la valeur de f, ensuite, par l'angle embrassé, car ces quantités figurent à l'exposant du second membre des équations ; pour une courroie plate en cuir, glissant sur une poulie fixe en fonte, f est ordinairement pris égal à 0,28 [1].

Le tableau ci-dessous, des valeurs de $\frac{T}{t}$ pour différentes valeurs de l'arc embrassé, peut être utile à consulter.

1. Leloutre, après de nombreuses expériences, admet pour les courroies neuves en cuir f=0.155, et pour les courroies imprégnées de cambouis f=0,22 ; d'après lui, descendrait, pour le chanvre, jusqu'à 0,075 ; toutes les poulies sont supposées en fonte polie.

Tableau des valeurs de $\frac{T}{t}$

ARC EMBRASSÉ α	COURROIE PLATE			CORDES			
				$f = 0.28$		$f = 0.14$	
	$f = 0.28$	$f = 0.22$	$f = 0155$	$\beta = 60°$	$\beta = 45°$	$\beta = 60°$	$\beta = 45°$
$0.2 \times 2\pi$	1.42	1.32	1.21	2.02	2.48	1.42	1.57
$0.3 \times 2\pi$	1.69	1.52	1.34	2.86	3.91	1.69	1.98
$0.4 \times 2\pi$	2.02	1.73	1.48	4.08	6.22	2.02	2.48
$0.5 \times 2\pi$	2.41	1.99	1.63	5.81	9.84	2.41	3.14
$0.6 \times 2\pi$	2.86	2.29	1.79	8.23	15.73	2.86	3.97
$0.7 \times 2\pi$	3.43	2.63	1.98	11.76	24.65	3.43	4.96
$0.8 \times 2\pi$	4.08	3.02	2.18	16.73	38.94	4.08	6.22
2π	5.81	3.97	2.65	33.76	97.02	5.81	9.84
$2 \times 2\pi$	33.76	»	»	1139.06	»	33.76	»
$4 \times 2\pi$	1139.06	»	»	»	»	»	»

La propriété que possède le rapport $\frac{T}{t}$, d'augmenter très rapidement avec l'angle embrassé, est souvent mise à profit dans les applications de la mécanique ; sur elle, sont basés les amarrages, les nœuds, les freins à lames employés dans les appareils de levage, certains freins dynamométriques, les transmissions par courroies, par cordes, etc., [1].

On remarquera que $\frac{T}{t}$ conserve toujours une valeur finie, et qu'ainsi il est nécessaire, pour empêcher le glissement, d'exercer sur le brin libre une tension, qui peut à la vérité devenir très faible.

96. — *Frein à bande flexible.* — Ce frein est souvent employé pour modérer le retour de la charge dans les appareils de levage; les deux dispositions les plus usitées sont celles des figures 98 et 99. Dans les deux cas, le point O est fixe, la force p agit avec un bras de levier L, α

1. Nous avons indiqué un système d'attache des câbles dans les épreuves de traction, basé sur ce principe. *Bulletin mensuel de l'Association des Ingénieurs* sortis des Ecoles spéciales de Gand, 1882-83, p. 18.

est l'angle embrassé, T et t sont les tensions aux deux extrémités de la

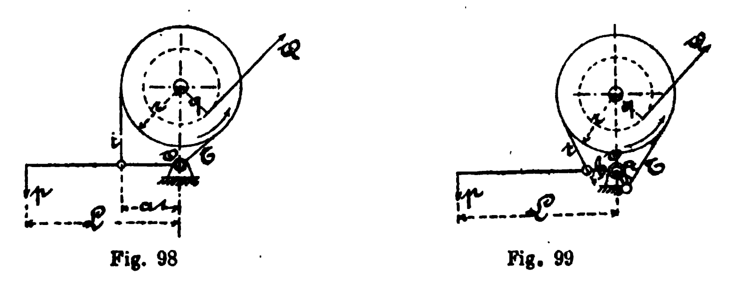


Fig. 98 Fig. 99

lame ; négligeons le frottement sur l'arbre ; pour que le mouvement ne puisse avoir lieu, il suffit qu'on ait :

$$T - t = \frac{Qq}{r}$$

Or, quand le glissement est sur le point de se produire,

$$\frac{T}{t} = e^{f\alpha}.$$

d'où :

$$t = \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \frac{Qq}{r}$$

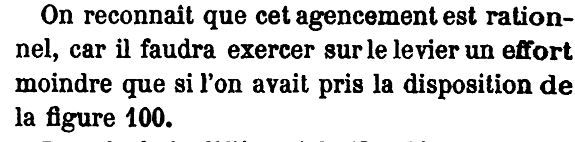
et

$$T = \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \frac{Qq}{r}$$

Avec la première disposition, on aura donc, pour le minimum de l'effort à exercer au bout du levier :

$$p = \frac{a}{L} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \frac{Qq}{r}$$

On produira ainsi la tension t dans le brin le moins tendu, et la traction T s'établira d'elle-même dans l'autre brin.



On reconnait que cet agencement est rationnel, car il faudra exercer sur le levier un effort moindre que si l'on avait pris la disposition de la figure 100.

Fig. 100



Dans le frein différentiel, (fig. 99), on a :

$$pL = tb - Ta$$

Lorsque le glissement est sur le point de se produire, le rapport $\frac{T}{t}$ prend la même valeur $e^{f\alpha}$ que dans le frein précédent, on a donc :

$$pL = \frac{Qq}{r} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \left(b - ae^{f\alpha}\right)$$

On peut, en agissant sur a et b, diminuer la valeur de p ; ainsi, on aura $p = o$, et le frein sera automatique, lorsque

$$\frac{b}{a} = e^{f\alpha}.$$

Lorsque $\frac{b}{a}$ est inférieur à $e^{f\alpha}$, on trouve une valeur de p négative, ce qui veut dire que, même en déchargeant l'extrémité du levier, le frein est encore serré ; mais, en aucun cas, b ne peut devenir inférieur à a, sinon, il faudrait absolument agir de bas en haut pour serrer le frein.

97. — *Transmissions par courroies et par cordes* [1]. — Ces transmissions s'emploient dans le cas de deux arbres parallèles, et relativement assez rapprochés. Soit O' (fig. 101), l'arbre à commander, qui doit effectuer par minute n' tours, l'arbre moteur O tournant à n révolutions.

Soit Qq le couple résistant sur l'arbre O',

Pp le couple moteur sur l'arbre O,

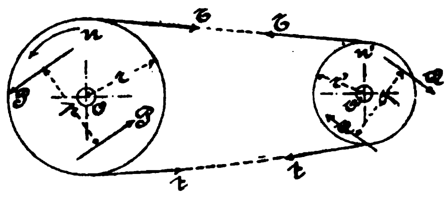


Fig. 101

r' et r les rayons des poulies,

ρ' et ρ les rayons des arbres.

1. Les transmissions par courroies et par câbles sont ici traitées uniquement au point de vue de la recherche des tensions nécessaires pour transmettre un effort ou une puissance donnés, et du calcul des résistances passives.

Le travail, en chevaux, à transmettre est :

$$N = \frac{2\pi\, n'\, Qq}{75 \times 60}$$

Lorsque N est connu, on trouve Qq au moyen de cette relation, qui donne :

$$Qq = \frac{75 \times 60}{2\pi\, n'} N$$

Lorsque la transmission s'opère, les deux brins sont inégalement tendus, mais la tension dans le brin conduit reste cependant assez grande pour qu'on puisse le considérer comme rectiligne, à moins que les arbres ne soient à une distance inusitée. On a, respectivement, pour les deux poulies O' et O en appelant t et T les tensions :

$$(1) \qquad Tr' = tr' + Qq + Mt + f'\, \rho' \text{ Rés. } (T, t)$$

$$(2) \qquad Pp + tr = Tr + MT + f'\, \rho \text{ Rés. } (T, t)$$

Ces équations renferment comme inconnues T, t et P, elles comportent donc une infinité de solutions, résultat qu'on pouvait prévoir *a priori*, car, lorsqu'une transmission fonctionne, il est toujours possible de donner aux deux brins de la courroie des tensions plus grandes que celles qui existent. Toutefois, il n'est pas avantageux d'en agir ainsi, car la section de la courroie devrait augmenter en conséquence ; toute augmentation des tensions au-delà des valeurs nécessaires entraînerait, du reste, des résistances passives supplémentaires.

D'autre part, la transmission ne peut s'effectuer que si la courroie ne glisse pas sur la jante de l'une ou de l'autre poulie, ce qui arriverait certainement si elle n'était pas assez tendue.

Pour que le glissement ne se produise sur aucune des deux poulies, il faut que l'on ait, en désignant par α' et α les angles embrassés sur chacune d'elles :

$$\frac{T}{t} \leqq e^{f\alpha'}$$

$$\frac{T}{t} \leqq e^{f\alpha}$$

Le rapport $\frac{T}{t}$ doit donc rester inférieur à la plus faible des deux

valeurs $e^{f\alpha'}$ ou $e^{f\alpha}$, et dans le cas d'une courroie non croisée, il suffira que $\frac{T}{t}$ soit plus petit que la valeur $e^{f\alpha}$ calculée pour la plus petite des deux poulies; nous ajouterons que lorsque les deux arbres sont à une distance convenable, l'angle se rapproche de 180°; cependant, pour tenir compte de la flèche du brin conduit, qui pour un certain sens de rotation, tend à diminuer l'arc embrassé, on prend souvent

$$\alpha = 0.4 \times 2\pi$$

ce qui donne (voir le tableau du n° 95)

$$\frac{T}{t} = 2 \text{ environ}$$

Quoiqu'il en soit, si l'on désigne par K la plus petite des deux valeurs $e^{f\alpha'}$ ou $e^{f\alpha}$, il faut que

$$\frac{T}{t} \leqq K \qquad (3)$$

Il existe une infinité de manières de satisfaire à la condition ci-dessus, mais on peut voir facilement qu'il y a intérêt à adopter pour $\frac{T}{t}$ un rapport aussi élevé que possible, car, soit μ le rapport des deux tensions, on a, en négligeant dans l'équation (1) tous les termes de résistances passives, qui sont peu importants:

$$T - t = \frac{Qq}{r'}$$

et puisque

$$\frac{T}{t} = \mu$$

on trouve:

$$t = \frac{1}{\mu - 1} \frac{Qq}{r'}.$$

$$T = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{Qq}{r'}$$

Il est visible que les tensions t et T diminuent lorsque μ augmente,

on devra donc, si l'on ne veut exagérer les tensions, élever μ autant que possible, c'est-à-dire le rendre égal à K, ce qui restreint la condition (3).

Les tensions sont alors approximativement :

$$t = \frac{1}{K-1} \frac{Qq}{r'}$$

$$T = \frac{K}{K-1} \frac{Qq}{r'}$$

mais il serait facile d'obtenir les valeurs exactes de t et T en utilisant complètement les équations (1) et (2).

Dans une transmission établie comme ci-dessus, le glissement serait sur le point de se produire, et il n'y aurait aucune réserve de tension pour prévenir le glissement en cas de variation accidentelle du couple résistant ; comme, de plus, les courroies finissent par s'allonger, surtout lorsqu'elles n'ont pas encore servi pendant longtemps, on préfère augmenter T et t ; les tensions ci-dessus conduiraient, pour l'ensemble des deux brins, à la tension totale

$$T + t = \frac{K+1}{K-1} \frac{Qq}{r'}$$

Lorsque la transmission ne fonctionne pas, par exemple lorsque la courroie vient d'être posée, les tensions sont les mêmes dans les deux brins, l'une d'elles augmente d'une certaine quantité pendant la marche, pendant que l'autre diminue d'une quantité *égale* [1]. La tension de pose

1. Ce fait est facile à démontrer, car soit T_1 la tension lors de la pose, E le coefficient d'élasticité du cuir ; en passant de la tension nulle à la tension T_1 l'unité de longueur de la courroie subit un allongement $\frac{T_1}{E}$, l'allongement correspondant à la tension T est $\frac{T}{E}$; lorsque la transmission se met en mouvement, l'allongement augmente donc le brin conducteur proportionnellement à $\frac{1}{E}(T - T_1)$; dans le brin conduit au contraire, l'allongement diminue proportionnellement à $\frac{1}{E}(T_1 - t)$; mais la longueur totale reste sensiblement la même, il faut donc que

$$T - T_1 = T_1 - t$$

ou

$$2T_1 = T + t$$

nécessaire pour permettre aux tensions T et t de se développer est donc

$$T_1 = \frac{T + t}{2} = \frac{1}{2}\frac{K + 1}{K - 1}\frac{Qq}{r'}$$

Pour se prémunir contre la possibilité du glissement, on augmente à dessein la tension de pose, et l'on fait

$$2\,T_1 = T + t = 1{,}2\frac{K + 1}{K - 1}\frac{Qq}{r'}$$

Comme on a approximativement

$$T - t = \frac{Qq}{r'}$$

On tire de ces deux dernières équations :

$$\frac{T}{t} = \frac{11\,K + 1}{K + 11}$$

K est nécessairement supérieur à l'unité, il en résulte que

$$\frac{T}{t} < K$$

c'est-à-dire qu'une certaine marge est réservée contre le danger du glissement.

La valeur

$$T - t = \frac{Qq}{r'}$$

n'est qu'approchée, elle est obtenue en négligeant les résistances passives dont l'effet est de nécessiter une augmentation de $T - t$, ce qui entraine l'augmentation du rapport $\frac{T}{t}$, attendu que la somme $T + t$ est déterminée par la tension de pose; le procédé indiqué ci-dessus permet cette augmentation sans que le rapport K soit dépassé ou même atteint.

98. — Dans certains cas, l'une des tensions est connue avec certitude, c'est lorsqu'on fait usage d'un galet tendeur (fig. 102); si l'on néglige le frottement sur l'axe du galet on peut facilement trouver *t* en fonction de l'effort *p* rapporté au centre du galet, et de l'angle d'inflexion du brin, cet angle est déterminé par la longueur de la courroie.

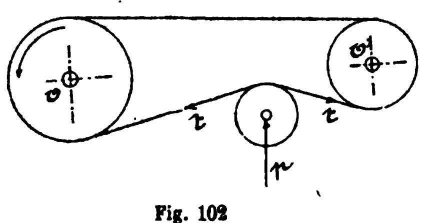


Fig. 102

Le galet tendeur doit toujours être disposé de manière à augmenter les arcs embrassés sur les poulies, et en raison de la tension plus faible à réaliser, il convient de le faire agir sur le brin conduit plutôt que sur le brin conducteur.

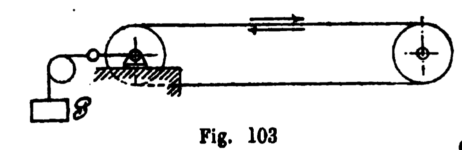


Fig. 103

On rencontre quelquefois, dans certaines transmissions par cordes, le système de tendeur représenté (fig. 103), on connait alors la somme des tensions.

99. — Lorsque les poulies sont assez rapprochées, et que le rapport des rayons est considérable, l'angle minimum embrassé diminue; aussi ce genre de transmissions exige une tension de pose exagérée, et il convient autant que possible de l'éviter; lorsque l'espace fait défaut pour installer un arbre intermédiaire, on emploie avec succès un galet auxiliaire (fig. 104), qui sert seulement à augmenter l'arc embrassé; pour diminuer la pression qui se reporte sur ses pivots, on l'installe de préférence sur le brin conduit. L'emploi de ce galet auxiliaire s'indique lorsque l'on veut établir une transmission à grande vitesse dans un espace réduit, par exemple dans les petites installations d'éclairage électrique.

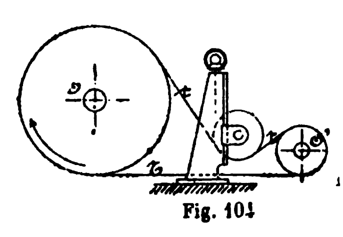


Fig. 104

On peut aussi, en croisant les brins (fig. 105), augmenter l'angle embrassé, qui devient alors le même pour les deux poulies, mais le frottement qui se développe à la rencontre des deux brins empêche d'employer ce système pour des transmis-

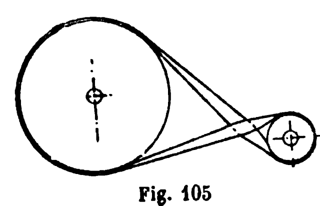


Fig. 105

sions importantes. En fait on n'emploie la courroie croisée que pour des courroies peu larges, et dans le but de changer le sens de la vitesse d'une transmission secondaire.

100. — *Vitesse des brins.* — L'effort circonférentiel que l'on doit transmettre à la poulie commandée est, en négligeant les résistances passives (n° 97)

$$\frac{Qq}{r'} = \frac{75 \times 60}{2\pi\ n'\ r'} N$$

En appelant v la vitesse de la courroie, on a

$$v = \frac{2\pi\ n'\ r'}{60}$$

cette valeur, substituée dans l'égalité précédente, conduit à une forme plus simple des tensions t et T

$$t = \frac{75\ N}{v} \frac{1}{K-1}$$

$$T = \frac{75\ N}{v} \frac{K}{K-1}$$

en supposant réalisées les conditions les plus favorables au point de vue des tensions, c'est-à-dire celles qui correspondent au commencement du glissement.

Pour transmettre une puissance N déterminée, on a donc intérêt à augmenter v autant que possible, car on peut ainsi réduire la section de la courroie proportionnellement à T, et diminuer en même temps les résistances passives.

L'augmentation de vitesse peut d'ailleurs être obtenue en agissant, soit sur les nombres de tours par minute, soit sur les rayons, soit sur ces deux éléments à la fois.

Lorsque la vitesse n'est pas grande, la force centrifuge qui s'exerce sur la courroie dans son passage sur les poulies est très faible et peut être négligée, mais on réalise parfois [1] de très grandes vitesses, et il

1. On peut citer comme exemple de l'une des vitesses les plus grandes que l'on ait atteinte jusqu'à ce jour, la transmission principale de la « Linière Gantoise », où deux courroies jumelles, de 1^{m},500 de largeur chacune, sont établies sur un même volant de 9^{m},144 de diamètre tournant à raison de 53 révolutions par minute ; la vitesse à la jante est de 25^{m}50 environ.

est nécessaire alors de rechercher l'influence que la force centrifuge peut avoir sur les tensions.

101. — L'effet de la force centrifuge est de diminuer la pression normale que la courroie exerce sur chaque élément de la jante, et, par conséquent, de réduire le frottement qui entraîne la courroie ; on ne peut empêcher le glissement que par un excès de tension dans les brins, la force centrifuge modifie donc les relations (3) et (4) établies au n° 95 pour les courroies plates, et les cordes fonctionnant sur les poulies à gorge, respectivement.

Soit p le poids de la courroie par unité de longueur, pds est le poids pour l'élément de longueur ds (fig. 95); cet élément est sollicité par les tensions X, $X + dX$, ainsi que par la réaction normale, Nds, de la poulie, la force centrifuge

$$\frac{p}{g}\omega^2 r\, ds$$

et, enfin, par le frottement $fNds$.

Si nous supposons qu'il s'agit d'un tambour circulaire, ω est la vitesse angulaire de l'élément considéré, r est le rayon, et ces quantités sont constantes.

Les équations d'équilibre de l'élément sont:

$$dX = fN\, ds$$

$$X\, d\alpha = \left(N + \frac{p}{g}\omega^2 r\right) ds$$

en éliminant N entre les deux équations, et remarquant que ωr désigne la vitesse v à la circonférence, on a:

$$\frac{dX}{X - \frac{p}{g}v^2} = f\, d\alpha$$

qui donne, par l'intégration, en appelant α l'angle correspondant à l'arc embrassé

$$\frac{T - \frac{p}{g}v^2}{t - \frac{p}{g}v^2} = e^{f\alpha} \tag{1}$$

Cette relation doit exister lorsque le glissement est sur le point de se produire, on voit immédiatement que l'on a :

$$\frac{T}{t} < \frac{T - \frac{p}{g} v^2}{t - \frac{p}{g} v^2}$$

ou

$$\frac{T}{t} < e^{f\alpha}$$

c'est-à-dire, que le rapport des tensions doit rester inférieur à ce qu'il est lorsque l'on néglige la force centrifuge ; comme leur différence doit être suffisante, d'autre part, pour entrainer l'effort circonférentiel, on voit, en définitive, que la force centrifuge oblige à augmenter les deux tensions, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

102. — Nous avons vu (100), qu'il y a intérêt à augmenter la vitesse de la courroie si l'on veut diminuer la tension, mais la force centrifuge qui augmente en conséquence, exerce un effet contraire, il y a donc lieu de rechercher la vitesse pour laquelle la puissance transmise est la plus grande, la section de la courroie étant donnée ; pour ne pas compliquer inutilement les formules et les résultats, nous ferons abstraction des résistances passives.

Soit σ la section de la courroie,

τ la charge admise par unité de section dans le brin conducteur,

v la vitesse,

δ le poids spécifique de la courroie,

$p = \delta\sigma$ le poids par unité de longueur.

La tension totale du brin conducteur étant T, celle du brin conduit est t, et la puissance transmise sera, en y comprenant les résistances passives :

$$(T - t)\, v$$

On tire de la relation (1), établie au n° 101, en supposant que le glissement est sur le point de se produire :

$$T - t = \left(1 - \frac{1}{e^{f\alpha}}\right) \left(T - \frac{p}{g} v^2\right)$$

ce qui donne:

$$(T-t)v=\left(1-\frac{1}{e^{f\alpha}}\right)\left(Tv-\frac{p}{g}v^3\right)$$

ou, puisque

$$T=\tau\sigma$$

et

$$p=\delta\sigma$$

$$(T-t)v=\left(1-\frac{1}{e^{f\alpha}}\right)\left(\tau v-\frac{\delta}{g}v^3\right)\sigma$$

La valeur de v qui rend nulle la dérivée du second membre est:

$$v_M=\sqrt{\frac{g\tau}{3\delta}}$$

Pour les courroies neuves, en cuir, le poids spécifique est:

$$\delta=1000$$

τ est la charge admise par mètre carré de section, elle varie avec le coefficient de sécurité que l'on adopte, et avec la qualité du cuir; les grandes transmissions sont quelquefois chargées à 0 kil., 40 (Leloutre), par millimètre carré du brin tendu; on a donc:

$$\tau=1000^2\times 0.40=400.000$$

D'où

$$v_M=36^m00 \text{ environ}$$

Pour une tension de 0 kil., 25 par millimètre carré, on trouve

$$v_M=28^m60$$

vitesse dont on s'approche rarement dans l'application.

Lorsque l'on adopte la vitesse v_M la plus avantageuse, la condition du glissement

$$\frac{T-\frac{p}{g}v^2_M}{t-\frac{p}{g}v^2_M}\gtreqless e^{f\alpha}$$

devient, en remarquant que

$$p = \delta\sigma$$

et

$$v^2_M = \frac{g\tau}{3\delta}$$

$$\frac{T - \frac{\sigma\tau}{3}}{t - \frac{\sigma\tau}{3}} \lesseqgtr e^{f\alpha}$$

ou, en faisant $\sigma\tau = T$:

$$\frac{T}{t} \lesseqgtr 3 \frac{e^{f\alpha}}{2 + e^{f\alpha}}$$

On voit que cette condition diffère notablement de celle obtenue en négligeant la force centrifuge.

A la vitesse de 18 mètres par seconde qui correspond à $\frac{v_M}{2}$, et qui est souvent réalisée, on a

$$\frac{T}{t} \lesseqgtr 6 \frac{e^{f\alpha}}{5 + e^{f\alpha}}$$

Pour $e^{f\alpha} = 2$ la condition devient

$$\frac{T}{t} \lesseqgtr \frac{12}{7}$$

alors qu'on aurait, en négligeant la force centrifuge:

$$\frac{T}{t} \lesseqgtr 2$$

Il est à remarquer aussi, que si T_1 représente la tension de pose, T et t les tensions en marche, on a toujours, puisque la longueur totale reste invariable:

$$2\,T_1 = T + t$$

En négligeant les frottements, et lorsque la courroie est sur le point de glisser, on a:

$$T - t = \frac{75 \times 60}{2\pi\, n'\, r'}\ N$$

et

$$\frac{T - \frac{p}{g} v^2}{t - \frac{p}{g} v^2} = e^{f\alpha}$$

qui remplace l'équation (3) du numéro 97.

Ces trois équations permettent de trouver la tension de pose.

103. — L'expression trouvée au numéro précédent pour v_M est applicable aux courroies et aux cordes de toute nature; on aurait, pour une courroie en caoutchouc (1)

$$\delta = 1750$$
$$\tau = 300000$$
$$v_M = 23^m50$$

Pour les cordages en chanvre fort des Flandres (44), on admet, d'après M. Vertongen, une tension de travail de 0 kil., 25 par millimètre carré, afin de ne pas fatiguer les épissures, on a:

$$\delta = 1050$$
$$\tau = 250000$$
$$v_M = 28^m00$$

Pour les cordages en chanvre de Manille, la charge admise est la même, mais $\delta = 830$, ce qui porte la vitesse v_M à $31^m,50$ (2).

104. — Le rayon des poulies ne figure pas dans l'expression de v_M, il semble donc indifférent de réaliser la vitesse par l'augmentation des nombres de tours ou par celle des rayons; toutefois, lorsqu'on tient compte de la raideur, on s'aperçoit qu'il est préférable d'adopter de grands rayons de poulies plutôt que d'agir sur le nombre de tours, car la puissance absorbée par la raideur augmente, pour une tension donnée, proportionnellement à la vitesse angulaire, attendu que cette puissance a pour expression, sur la poulie motrice:

$$\omega \, MT$$

et sur la poulie commandée:

$$\omega' \, Mt$$

où $M = 0,02 \, m$

1. Leloutre. — *Les transmissions par courroies*, etc., Paris 1884.
2. La vitesse la plus grande qui ait été réalisée dans une transmission par câbles, est celle d'une machine motrice établie par Douglas et Grant; le volant comprend 38 gorges, il a 30 pieds de diamètre, et fait 60 tours par minute (*Engineering*, 1888, 1er sem. p. 332), ce qui porte la vitesse à $28^m,75$ par seconde.

m représentant le poids du câble par mètre de longueur, ce poids est proportionnel à la section, laquelle est déterminée en fonction de T et ne dépend par conséquent que de la vitesse linéaire.

Pour les courroies, et bien que les données numériques fassent défaut, nous devrions conclure dans le même sens.

Le choix des rayons exerce, sur la puissance perdue en frottement, une influence qui échappe à toute loi générale. Dans les grosses transmissions, le poids des volants et des poulies est la force prépondérante, tandis que l'inverse a lieu pour transmissions légères. La vitesse de rotation réagit également sur le diamètre des arbres soumis à la torsion.

D'ailleurs, la raison d'économie limite le diamètre à donner aux poulies, abstraction faite des considérations d'emplacement.

105. — *Glissement permanent des courroies.* — M. Kretz [1] a, le premier, appelé l'attention sur un glissement d'une nature spéciale, qui se produit dans les transmissions, même lorsque les tensions sont convenablement établies, et qui a pour cause l'élasticité des liens. Lorsqu'on fait abstraction des changements de longueur qui accompagnent les tensions t et T, on doit avoir :

$$nr = n'r'$$

car le déplacement des poulies, mesuré à la circonférence, est le même pour les deux arbres ; mais, lorsque la permanence du régime est établie, la quantité de matière qui s'enroule sur l'une quelconque des deux poulies est la même que celle qui s'en déroule pendant le même temps ; cette quantité de matière répond, pour les deux brins, à des longueurs l, l', différentes ; car, en appelant E le coefficient d'élasticité, et σ la section de la courroie, on doit avoir :

$$\frac{l}{l'} = \frac{\frac{t}{\sigma} + E}{\frac{T}{\sigma} + E}$$

Sur la poulie menée, la courroie subit donc un glissement dans le sens du mouvement, tandis que, sur la poulie motrice, un effet opposé se produit; au total, les choses se passent comme si la poulie menée enroulant la longueur

$$\frac{t}{\sigma} + E$$

1. *Annales des Mines*, 1862, T. I.

la poulie motrice devait enrouler la longueur

$$\frac{T}{\sigma} + E$$

on doit donc avoir:

$$\frac{nr}{n'r'} = \frac{\frac{T}{\sigma} + E}{\frac{t}{\sigma} + E}$$

On peut faire $E = 7$ pour les courroies simples en cuir [1]; on a d'ailleurs, pour les courroies fort chargées:

$$\frac{T}{\sigma} = 0.40$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0.20$$

D'où

$$n'r' = 0.973\ nr$$

Tandis que pour les courroies peu fatiguées:

$$\frac{T}{\sigma} = 0.25$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0.125$$

et

$$n'r' = 0.983\ nr$$

nous admettons ci-dessus que la tension dans le brin conducteur est double de celle du brin conduit, ce qui répond à des conditions ordinaires pour l'arc embrassé (95, tableau).

M. Kretz a trouvé par ses expériences sur des courroies en cuir, chargées de cette manière:

$$n'r' = 0.98\ nr$$

L'arbre commandé subit donc une réduction α, de vitesse, qui dépend

1. Le millimètre carré est pris comme unité de section (Leloutre XV[e] expérience). M. Kretz adopte $E = 5.60$. M. Achard dans son mémoire sur la transmission et la distribution des forces motrices à longue distance, p. 29, fait $E = 15$.

des tensions de marche, et du coefficient d'élasticité. Pour plusieurs transmissions successives, la vitesse du dernier arbre est affectée d'un coefficient de réduction qui, dans les conditions ordinaires, prend les valeurs ci-dessous :

pour 3 arbres $\alpha = 0{,}98^2$ ou 0,96,
» 4 » $\alpha = 0{,}98^3$ ou 0,94,
» 5 » $\alpha = 0{,}98^4$ ou 0,92,
» 6 » $\alpha = 0{,}98^5$ ou 0,90.

Le ralentissement du sixième arbre atteint donc 10 % ; il y a lieu, dans l'établissement des transmissions successives, de déterminer les rayons des poulies en tenant compte de ce glissement.

Les expériences d'allongement faites sur les cordes en chanvre ne sont pas assez complètes pour qu'on puisse assigner une valeur précise à leur coefficient d'élasticité ; celui-ci paraît-être le même pour le chanvre de Manille et le chanvre de Russie, et est sans doute compris entre deux et trois fois celui du cuir lorsque les cordages ont de 30 à 40 millimètres de diamètre [1] ; le glissement permanent serait donc beaucoup moindre pour les cordes que pour les courroies ; même en tenant compte du rapport élevé $\frac{T}{t}$ que permettent d'atteindre les poulies à gorge, on trouve

$$\alpha = 0.99$$

Dans les transmissions par câbles métalliques, le coefficient d'élasticité est très élevé par rapport à la charge de travail, et le glissement particulier dont nous nous occupons devient tout à fait insensible.

106. — Le glissement permanent entraine une perte dont il n'a pas été tenu compte au n° 97, perte qui n'affecte pas la valeur de Pp, mais qui se traduit par un déplacement plus grand de ce couple ; en désignant par ω et ω' les vitesses de rotation des arbres, le rapport du travail utile au travail dépensé, ou le rendement de la transmission, est donné par :

$$U = \frac{Qq\omega'}{Pp\omega}$$

1. Johow. *Hilfsbuch für den Schiffbau.* Berlin, Springer, 1884. (Expériences sur les cordages de Felten et Guillaume, faites au laboratoire technologique de Berlin). pp. 126-127.

Or,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n'}{n}$$

et (105)

$$\frac{n'}{n} = \alpha \frac{r}{r'}$$

c'est-à-dire :

$$U = \alpha \frac{Qq}{Pp} \frac{r}{r'}$$

α doit être pris égal à 0,98 pour les courroies en cuir.

107. — ***Comparaison entre les transmissions par courroie, par cordes et par engrenages.*** — Il peut être intéressant de comparer les résistances passives calculées pour des transmissions existantes, établies dans les conditions suivantes (1):

1° *Transmission par courroie* de 1 mètre de largeur et 12 millimètres d'épaisseur

$$n' = 100$$
$$r' = 1^m500$$
$$r = 2^m650$$
$$f' = 0.05$$
$$\rho = 0.125$$
$$\rho' = 0.090$$

Les arbres sont supposés assez éloignés, et au même niveau ; le poids de la poulie menée et de son arbre est de 6,000 kilogrammes ; le volant moteur pèse, avec son arbre 20,000 kilogrammes. La puissance à transmettre est $N = 400$ chevaux.

Au lieu de résoudre le problème rigoureusement, nous calculons les résistances passives comme si chacune d'elles était seule, nous supposons aussi que les forces motrices et résistantes sont appliquées sous forme de couples. On trouve pour l'effort circonférentiel :

$$\frac{Qq}{r'} = T - t = 1910 \text{ kil.}$$

1. Transmissions établies par une maison de construction de Gand.

d'où, prenant

$$T + t = 1.2\,\frac{K+1}{K-1}\,\frac{Qq}{r'}$$

avec

$$K = 2$$

on obtient :

$$T = 4393$$

$$t = 2483$$

$$\frac{T}{\sigma} = 0^{k}366$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0^{k}207$$

$$\alpha = 0.978$$

$$n' = \alpha \frac{r}{r'}\, n$$

d'où $n = 57{,}87$

Travail du frottement, par seconde, sur les fusées de l'arbre moteur:

$$\frac{2\pi n}{60} \times f' \rho\, [0.96 \times 20000 + 0.4\, (T + t)] = 829 \text{ kgm.}$$

sur les fusées de la poulie réceptrice:

$$\frac{2\pi n'}{60} \times f' \rho' \,[0.96 \times 6000 + 0.4\, (T + t)] = 401 \text{ kgm.}$$

Travail perdu par glissement, par seconde:

$$\frac{1}{\alpha}\,(1 - \alpha)\, N \times 75 = 675 \text{ kgm.}$$

Le travail perdu par suite de la raideur n'a pu être calculé faute de données.

2° *Transmission au moyen de 13 cordes* en chanvre de Manille de 40 millimètres de diamètre; les gorges de poulies ont un angle $\beta = 45°$.

Bien qu'on puisse réaliser un rapport de tensions un peu supérieur à celui des courroies, nous adopterons aussi:

$$K = 2$$

et nous trouverons pour T et t, les mêmes valeurs que pour la courroie.

On a ici :

$$\frac{T}{\sigma} = 0^k27$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0^k15$$

Avec $E = 20$, il vient :

$$\alpha = 0.994 \text{ et } n = 56.9$$

Le travail perdu par glissement est donc :

$$\frac{1}{\alpha}(1 - \alpha) N \times 75 = 181 \text{ kgm.}$$

Le travail perdu par la raideur [1] sur le volant est, par seconde :

$$\frac{2\pi n}{60} \times 13 \times 0.02 \times 1.056 \times \frac{T}{13} = 552,5 \text{ kgm.}$$

et sur la poulie :

$$\frac{2\pi n'}{60} \times 13 \times 0.02 \times 1.056 \frac{t}{13} = 548,9 \text{kgm.}$$

quant au frottement sur les fusées, il est le même que dans le premier cas pour l'arbre commandé, il est réduit à 815 kilogrammètres pour l'arbre moteur à cause de la valeur de n légèrement inférieure.

On a donc finalement le tableau ci-dessous.

	COURROIE	CORDES
Travail transmis	30.000 kgm.	30.000 kgm.
— de frottements sur les tourillons.	1230 ou 4 %	1216 ou 4 %
— du glissement.	675 ou 2.2 %	181 ou 0.6 %
— de la raideur	Inconnu (faible)	1101 ou 3.6 %

1. Le poids de la corde en chanvre de Manille est par mètre courant (44).

$$p = 1^k056$$

3° *Pour une transmission par engrenages*, on aurait (67) en adoptant, pour la simplicité des calculs.

$$m = 150$$
$$m' = 265$$

et en prenant un effort circonférentiel transmis égal à celui des applications précédentes, soit X = 1,910 kilogrammes

$$Y - X = \pi f X \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$$

Si l'on prend ici le coefficient f des dents en fonte égal à 0,15, on a

$$Y - X = 0.0049\ X = 9^k36$$

et comme la vitesse à la circonférence est

$$\frac{2\pi n'r'}{60} = 15^m708$$

le frottement des dents n'absorbe par seconde qu'un travail insignifiant:

$$9.36 \times 15.708 = 147 \text{ kgm.}$$

Le frottement sur les fusées prend d'autres valeurs que dans les cas précédents; toutefois, les réactions des dents sont peu importantes en comparaison du poids mort des roues, on voit que l'élément en question ne peut différer beaucoup pour les trois modes de transmission envisagés.

Au point de vue du rendement, la transmission par engrenages apparaît donc comme très supérieure, puis vient la courroie, enfin les cordes. Le principal inconvénient des engrenages est dans les trépidations, qui empêchent d'atteindre de grandes vitesses circonférentielles.

§ IV.

Systèmes dans lesquels se produisent des chocs.

108. — *Pilon mû par un arbre à cames.* — Proposons-nous de déterminer la puissance à communiquer à l'arbre à cames d'un pilon (fig. 106), pour maintenir une vitesse moyenne de n tours par minute, ou une vitesse angulaire moyenne $\Omega = \frac{2\pi n}{60}$.

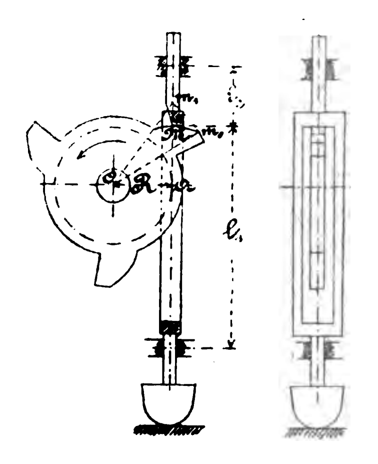


Fig. 106

Soit :

p le poids du pilon,

f la valeur unique du coefficient des divers frottements,

ρ le rayon des tourillons de l'arbre,

ω la vitesse angulaire, variable, du système tournant, composé de masses m situées à la distance r de l'axe.

Le profil Mm_0 de la came, est la développante de la circonférence OA, de rayon R ; au moment où le contact s'établit, le pilon au repos est rencontré par le point M de la came ; appelons ω_0 la vitesse angulaire de l'arbre à cet instant, et ω_1 la vitesse après le choc ; soit $AM = \lambda_0$.

Evaluons d'abord le travail à dépenser dans cette première période du mouvement :

1re période. — Le travail des forces extérieures, pouvant être négligé (47), appliquons au système tournant, isolé au préalable, le théorème des moments des quantités de mouvement, en tenant compte seulement des impulsions des forces instantanées et de leurs réactions, le choc ayant une durée θ.

$$(1) \qquad (\omega_0 - \omega_1) \Sigma mr^2 = \int_0^\theta (R + f\lambda_0 + f\rho) N dt$$

Pour le pilon isolé, nous aurons, par l'équation des quantités de mou-

vement projetées sur la verticale, en remarquant que la vitesse acquise à la fin du choc est ω_1 R, et que le frottement sur les guides est f^2 N ;

$$\text{(2)} \qquad \frac{p}{g}\,\omega_1\,R = \int_o^\theta (1 - f^2)\,N\,dt$$

En éliminant $\int_o^\theta N\,dt$ entre les deux équations, il vient :

$$\text{(3)} \qquad \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{R + f\lambda_0 + f\rho}{1 - f^2}\,\frac{\frac{p}{g}\,R}{\Sigma\,mr^2}$$

Pendant le choc, le travail utile produit étant négligeable, la moitié de la force vive perdue par le système a dû être fournie par l'arbre à cames ; on peut l'établir, soit par l'expression de Carnot, soit d'une manière directe, car la vitesse ω_1 est connue en fonction de ω_0.

L'expression à laquelle on arrive ainsi est assez compliquée, on peut se contenter d'une solution approchée en négligeant les frottements ; on tire de l'équation (3) en faisant $f = o$:

$$\omega_1 = \omega_0\,\frac{\Sigma\,mr^2}{\Sigma\,mr^2 + \frac{p}{g}\,R^2}$$

On peut poser :

$$\Sigma\,mr^2 = \frac{P}{g}\,R^2$$

Le poids P étant calculé en conséquence, et l'on a alors :

$$\omega_1 = \omega_0\,\frac{P}{P + p}$$

La force vive de l'arbre à cames au moment du choc est :

$$\frac{P}{g}\,R^2\,\omega_0^2$$

La force vive de l'ensemble du système après le choc est :

$$\left(\frac{P + p}{g}\right) R^2\,\omega_1^2 \quad \text{ou} \quad \frac{P}{g}\,R^2\omega_0^2\,\frac{P}{P + p}$$

La perte de force vive est donc :

$$\frac{P}{g} R^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{P}{P+p}\right)$$

ou

$$\frac{P}{g} R^2 \omega_0^2 \frac{p}{P+p}$$

Le travail correspondant est :

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \omega_0^2 \frac{p}{P+p}$$

ou encore :

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \omega_0^2 R^2 \frac{1}{1+\frac{p}{P}}$$

Lorsque p est faible en comparaison de P, on voit que le travail dépensé pendant le choc est celui qui correspond à la moitié de la force vive du pilon, celui-ci étant supposé animé de la vitesse

$$\omega_0 R$$

qui est celle de l'arbre à cames au point A, immédiatement avant le choc.

D'ailleurs, lorsqu'on fait l'hypothèse ci-dessus, ω_1 tend vers ω_0 ; c'est-à-dire que l'arbre subit pendant le choc un ralentissement peu prononcé, on peut alors prendre :

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \Omega^2 R^2$$

2e période. — Pendant la 2e période, le pilon est soulevé par la came ; si l'on suppose que la vitesse angulaire de l'arbre est constante, et égale à Ω, on a pour le travail élémentaire des résistances pendant le temps dt, le poids de l'arbre étant négligé :

$$(NR + fN\lambda + fN\rho)\,\Omega\,dt$$

L'action N doit équilibrer le poids du pilon, et le frottement sur ses guides, on doit donc avoir :

$$N = p + f^2 N$$

d'où

$$N = \frac{p}{1 - f^2}$$

Le travail élémentaire devient :

$$\frac{p}{1-f^2}(R + f\lambda + f\rho)\, \Omega\, dt$$

λ est variable avec le temps ; si l'on désigne par λ_1 sa valeur limite à l'extrémité de la came, et par t_1 la durée de la période que nous considérons :

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \Omega\, R\, t_1$$
$$\lambda = \lambda_0 + \Omega R t$$

Le travail total pendant la deuxième période est donc :

$$\frac{p}{1-f^2}\, \Omega \int_0^{t_1} (R + f\lambda + f\rho)\, dt$$

ou, en intégrant, et remarquant que

$$t_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\Omega R}$$

$$T_2 = \frac{p\,(\lambda_1 - \lambda_0)}{1-f^2}\left[1 + \frac{f}{R}\left(\rho + \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}\right)\right]$$

N.-B. — On peut tenir compte séparément du travail de frottement dû au poids de l'arbre à cames, bien que ce poids se compose en réalité avec les autres forces, mais l'erreur commise ainsi est très faible, désignons le par P_1 ; l'angle décrit par l'arbre pendant la deuxième période est :

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}$$

Le travail du frottement cherché est donc :

$$t_2 = f'\rho\, \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}\, P_1$$

3e période. — Enfin, jusqu'au moment où la came suivante doit venir soulever le pilon, après sa chute, il n'y a d'autre travail à communiquer à l'arbre que celui destiné à vaincre le frottement sur les tourillons; soit m_1 le nombre des cames, l'angle décrit pendant la deuxième et la troisième périodes réunies est :

$$\frac{2\pi}{m_1}$$

Il en résulte que l'angle décrit pendant la troisième période seule est :

$$\frac{2\pi}{m_1} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}$$

on trouve ainsi, pour le travail absorbé par le frottement des tourillons :

$$T_3 = f'\rho \left(\frac{2\pi}{m_1} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}\right) P_1$$

Le travail absorbé pendant un tour de l'arbre à cames est donc :

$$m_1 (T_1 + T_2 + t_2 + T_3)$$

et la puissance cherchée a pour expression :

$$N = \frac{n}{60 \times 75} m_1 (T_1 + T_2 + t_2 + T_3)$$

Le travail utile effectué pendant les trois périodes considérées se réduit à la levée du pilon à la hauteur $(\lambda_1 - \lambda_0)$, le rendement de la machine est ainsi :

$$U = \frac{p (\lambda_1 - \lambda_0)}{T_1 + T_2 + t_2 + T_3}$$

109. — Les réactions qui se produisent sur les appuis pendant le choc occasionnent une perte de force vive dont nous n'avons pas tenu compte, car les supports se déplacent légèrement sous l'action des pressions intenses dues aux forces instantanées. En réalité, la roue à cames, en changeant de vitesse dans un temps très court, exerce sur ses appuis un effet analogue à celui qu'elle produit sur le pilon; celui-ci transmet même à ses guides par suite du frottement ou par pression

directe, d'après la constitution du système [1], des chocs plus ou moins intenses.

Les pertes de force vive dues aux ébranlements échappent au calcul, parce que les masses intéressées sont ordinairement mal définies.

On peut dans quelques cas, faire en sorte que les appuis ne supportent aucune réaction pendant le choc, soit en donnant à la pièce une forme convenable, soit en ajoutant des masses en certains endroits, soit en choisissant le point où se produit le choc. Pour que l'appui ne subisse aucune réaction, il faut qu'il y ait équilibre entre la force instantanée provenant du choc, et les réactions d'inertie de la masse choquée; ainsi, dans le cas d'une barre prismatique pesante, de longueur L, oscillant au point O (fig. 107), à une distance l du milieu, et recevant une percussion à la distance λ de l'axe, on sait que la condition nécessaire pour que le point O ne soit pas sollicité est :

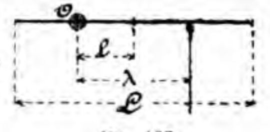


Fig. 107

$$\lambda = \frac{\Sigma mr^2}{Ml}$$

Σmr^2 est le moment d'inertie par rapport au point O,

M est la masse de la barre,

Lorsque l'articulation est à l'extrémité, on a :

$$l = \frac{1}{2} L$$

$$\lambda = \frac{2}{3} L$$

Lorsque l'on ajoute une masse à l'extrémité d'un manche prismatique oscillant autour d'une articulation qui se trouve à l'extrémité opposée, la percussion doit se rapprocher de cette masse. Cette condition était plus ou moins remplie dans les marteaux dits à *l'allemande*; le marteau frontal était dans des conditions moins bonnes; enfin, le martinet, ou marteau à bascule, était très défectueux au point de vue des percussions exercées sur son axe.

1. Dans la fig. 106, nous avons à dessein disposé la tige du pilon de manière à éviter le choc direct sur les guides ; si cette tige, au lieu d'être attaquée sur l'axe au point M, était déviée d'une certaine quantité à droite de ce point, il est visible qu'il se produirait sur les guides des forces instantanées qui se développeraient en raisons des distances l_1 et l_2; les frottements dus aux guides seraient aussi beaucoup augmentés.

CHAPITRE III

Régulateurs du mouvement.

110.—Le mouvement des machines est rarement uniforme, elles devraient d'abord, pour satisfaire à cette condition, ne comporter que des pièces animées de mouvements de rotation ou de translation continus (**11**); lorsque les pièces à mouvement alternatif sont de peu d'importance, on peut cependant admettre que le mouvement du système est uniforme lorsque sa force vive est constante, mais il faut, pour qu'il en soit ainsi, que les forces motrices et les résistances utiles et passives se fassent équilibre sur le système, sans l'intervention des réactions d'inertie, qui sont nulles. Si cette égalité n'a pas lieu, il n'existe d'autres moyens pour réaliser l'uniformité, que d'appliquer au système, des travaux de grandeur et de signe convenables. On peut citer, comme rentrant dans cette catégorie, les freins employés sur les pentes pour absorber le travail moteur dû au poids des trains, les cataractes à huile employées dans certains mécanismes (7[e] fascicule, n° 67), les contrepoids employés pour équilibrer les masses tournantes excentriques, les arbres à ailettes des mouvements d'horlogerie, etc.

Il arrive plus souvent que le mouvement est périodique (13), dans ce cas, on peut se proposer de réduire, pour une pièce déterminée, les écarts de vitesse qui se produisent pendant la période, en assignant à ces écarts une limite qu'ils ne peuvent dépasser. Ainsi, dans les moteurs à vapeur, on cherche à régulariser le mouvement de rotation de l'arbre de couche. On conçoit que, sans rien changer aux variations de la force vive, lesquelles ne dépendent que de l'intégrale des travaux pendant le temps correspondant, on peut réduire l'écart des vitesses en augmentant les masses mouvantes, tel est le mode d'action du volant.

Pour que le mouvement soit périodique, il faut que l'intégrale des travaux de la période soit nulle; lorsque les forces motrices ou les résistances varient d'une période à l'autre, il est nécessaire d'agir, soit

sur le travail moteur, soit sur le travail résistant passif; ce dernier mode d'action entraine, comme conséquence, un mauvais emploi des forces motrices, c'est donc le travail moteur qu'il convient d'augmenter ou de diminuer; on y arrive au moyen d'appareils automatiques, basés le plus souvent sur l'action de la force centrifuge.

La régularisation comprend donc deux groupes d'organes bien distincts, les volants, destinés à uniformiser la vitesse dans l'intervalle de la période, et les régulateurs proprement dits, destinés à rendre le mouvement périodique, en agissant sur le travail.

§ I.

DU VOLANT

111. — La force vive est donnée à chaque instant par l'équation

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \int_{t_0}^{t} [\Sigma\tau_m - (\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r) dt$$

Le mode de représentation graphique employé au n° 12 donne, pour la période, les courbes de travaux (fig. 108); le trait plein représente

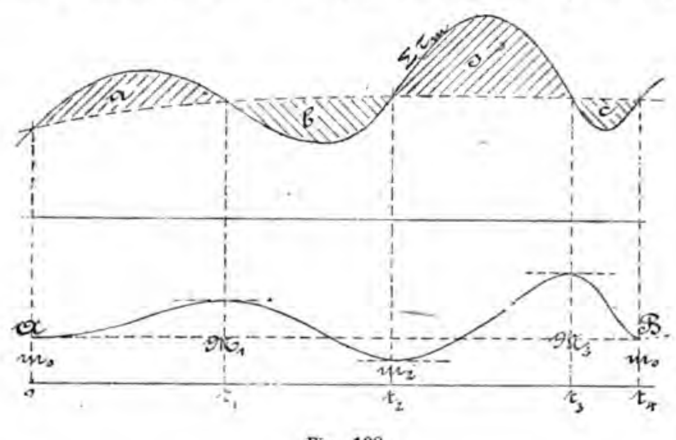


Fig. 108

$\Sigma\tau_m$, le trait pointillé se rapporte aux travaux résistants; admettons que la période soit comptée à partir du temps o, pour lequel la force vive est

$\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$; la loi des forces vives est fournie par les ordonnées de la courbe AB, celle-ci comporte, pour la période, des maxima et des minima, lorsqu'il s'agit d'une machine composée exclusivement de pièces tournantes et de pièces à translation continue (train roulant), les pièces sont liées de telle manière que les valeurs les plus grandes et les plus petites de la force vive, correspondent en même temps aux valeurs des vitesses maxima et minima de toutes les pièces, tandis qu'il n'en est pas nécessairement ainsi lorsque le système est constitué autrement, il y a donc deux cas principaux à considérer.

Premier cas.

SYSTÈME DE PIÈCES TOURNANTES.

112. — Lorsque le système est composé exclusivement de masses tournantes, ou que les pièces à mouvement alternatif sont peu importantes, les masses sont réparties sur un ou plusieurs arbres dont les vitesses angulaires sont :

$$\omega, \quad \alpha\omega, \quad \beta\omega, \quad \text{etc.}$$

La force vive à l'instant t est alors :

$$\Sigma mr^2\omega^2 + \Sigma m'r'^2\alpha^2\omega^2 +$$

ou

$$\omega^2 (\Sigma mr^2 + \alpha^2\Sigma m'r'^2 + \beta^2\Sigma m''r''^2 \ldots\ldots)$$

Si l'on désigne par A l'expression comprise entre parenthèses, en remarquant qu'elle est une fonction simple des moments d'inertie de chacune des pièces et des rapports entre leurs vitesses angulaires, il vient pour l'équation des forces vives :

$$\frac{1}{2} A (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{t_0}^{t} [\Sigma\tau_m - (\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r) \, dt$$

On peut démontrer que, lorsque la différence entre le travail moteur et les travaux résistants ne comporte pas plus de quatre boucles par période, les unes positives, les autres négatives, les valeurs la plus grande et la plus petite de la force vive correspondent aux extrémités de

la boucle la plus grande [1]. Ainsi, soit s la boucle représentant le plus grand excès de travail qui se produit dans la période, on a :

$$\begin{aligned} M_1 - m_0 &= a \\ M_1 - m_2 &= b \\ M_3 - m_2 &= s \\ M_3 - m_0 &= c \end{aligned}$$

on tire facilement de ces équations :

$$\begin{aligned} M_3 - M_1 &= s - b \\ m_0 - m_2 &= s - c \end{aligned}$$

à cause de l'hypothèse faite sur la valeur de s, on a :

$$\begin{aligned} M_3 &> M_1 \\ m_2 &< m_0 \end{aligned}$$

M_3 est donc le plus grand des deux maxima, m_2 est en même temps le plus petit des deux minima de force vive

On est certain, par suite de la constitution du système, que la valeur la plus faible de ω se produit à l'instant t_2, la valeur la plus grande correspond à l'instant t_3, on aura, en désignant par ω_2 et ω_3 ces valeurs :

$$\frac{1}{2} A (\omega_3^2 - \omega_2^2) = s$$

ou

$$\frac{1}{2} A (\omega_3 - \omega_2) = \frac{s}{\omega_3 + \omega_2}$$

ω_2 et ω_3 étant les vitesses extrêmes, on peut sans grande erreur poser, si Ω désigne la vitesse de régime :

$$\Omega = \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}$$

il vient alors :

$$\omega_3 - \omega_2 = \frac{s}{A\Omega}$$

On s'impose la condition :

$$\omega_3 - \omega_2 = \frac{\Omega}{n}$$

n étant un coefficient choisi à volonté pour limiter comme on veut le plus grand écart des vitesses $\omega_3 - \omega_2$.

1. La propriété cesse d'être générale lorsque le diagramme en question comprend plus de quatre boucles.

Par la combinaison des deux dernières équations, on obtient :

$$A = \frac{ns}{\Omega^2}$$

On réalise, au besoin, la valeur de A, au moyen de masses additionnelles; dans la plupart des cas, il n'y a qu'un arbre tournant, A sert à calculer les dimensions du volant dont on peut *a priori* se donner le diamètre, la largeur de jante, etc. ***La valeur de A varie en raison inverse de Ω^2, il y a donc intérêt, pour diminuer le poids du volant, à lui donner une vitesse angulaire aussi grande que possible.*** L'influence de la vitesse de rotation peut même être plus considérable : ainsi, dans une machine à vapeur de puissance donnée, s varie en raison inverse de la vitesse angulaire, ou du nombre de tours adopté.

Pour déterminer s, on ne peut se servir du diagramme τ en fonction du temps, car on ne connait pas *a priori* la loi du mouvement (**14**); les forces sollicitantes sont données, non en fonction du temps, mais d'après la position de leur point d'application, il est donc plus facile d'exprimer le travail des forces en fonction de l'angle décrit par l'une des pièces, et d'obtenir par l'intégration les excès tels que a, b, s, c, entre lesquels on choisit le plus grand.

Il est souvent commode d'opérer graphiquement.

113. — *Exemple.* — On connait, pour chaque position de la crossette d'une machine à vapeur, la pression exercée par le piston, représentée par l'ordonnée P (fig. 109) ; on suppose que la résistance, appliquée tangentiellement au volant, est constante, on néglige le frottement.

Considérons le bouton M de la manivelle, il reçoit la composante motrice X de la bielle ; d'autre part, on peut supposer que la résistance est appliquée directement au même point, sous forme d'une force constante Q. On développe le chemin décrit par le bouton M, en partageant la circonférence en m parties égales, et en portant m divisions égales et arbitraires, sur la ligne $M'_0\, M'_0$. Supposons que M soit l'un des points de division, et M' le point correspondant du développement; cherchons la valeur de X.

Soit ds le déplacement du point C, le travail élémentaire de P est Pds; soit ds' le déplacement correspondant du point M sur la circonférence, on doit avoir :

$$X\, ds' = P ds$$

Élevons en C la perpendiculaire au chemin $C_0 C_1$ décrit par la crossette,

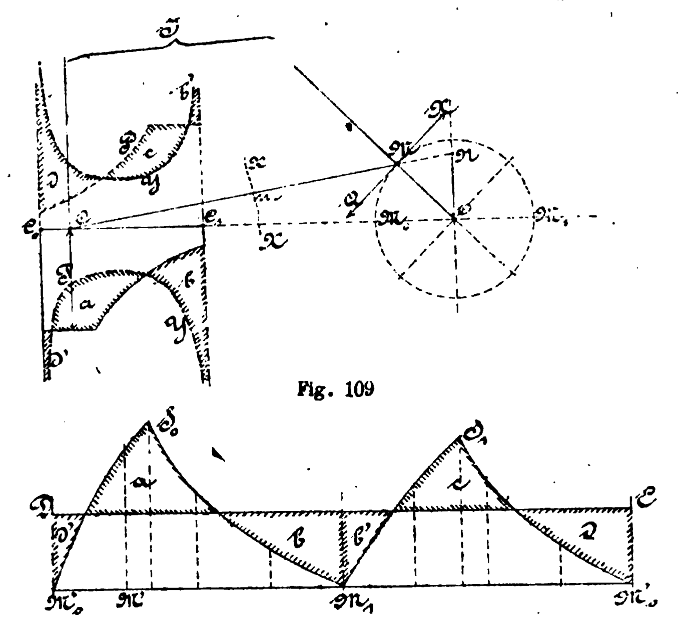


Fig. 109

le point I où cette perpendiculaire rencontre le rayon OM prolongé, est le centre instantané de la bielle, ce qui donne :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{IM}{IC}$$

Menons par O la perpendiculaire ON à OC, et prolongeons CM jusqu'au point N ; on a, par les deux triangles semblables ICM, MNO :

$$\frac{IM}{IC} = \frac{OM}{ON}$$

d'où

$$X = \frac{P}{OM} ON$$

on voit que l'effort tangentiel X est proportionnel au produit $P \times ON$; le diviseur OM est constant, et ne peut avoir d'influence que sur l'échelle de la figure cherchée, échelle qui est arbitraire, et dont nous ne devons pas nous préoccuper.

Il suffit donc de mener l'ordonnée M' égale au produit $P \times ON$, et d'opérer de la même manière pour les autres points, on obtient ainsi une surface $M'_0 S_0 M_1 S_1 M'_0$, proportionnelle au travail moteur.

La résistance tangentielle Q, étant constante, peut s'obtenir, à l'échelle de la figure, en construisant le rectangle équivalent $M'_0DEM'_0$; celui-ci représente le travail de la machine pour un tour, ou le travail de l'effort P pendant les deux courses d'aller et retour, il a pour valeur un nombre connu de kilogrammètres, qui permet de fixer l'échelle de la figure et par conséquent, d'évaluer les travaux a, $b + b'$, c, $d + d'$; le plus grand, parmi ces travaux, est la valeur cherchée de s.

114. — Le choix du point M, où se manifestent la force motrice et la résistance, est arbitraire ; on aurait pu tout aussi bien prendre le point C, et, d'une manière générale, si l'on coupe une pièce de la machine par une section XX, on peut, en isolant la partie du mécanisme laissée à gauche de cette section, chercher l'effort qui, appliqué en m, équilibrerait la force motrice P ; en isolant le système de droite, on peut de même chercher la force qui, appliquée au même point m, équilibrerait la résistance Q, et, en projetant ces forces sur la trajectoire du point m, on arriverait à un diagramme du travail qui pourrait servir au calcul du volant.

Mais on voit qu'il sera plus simple, en général, de choisir un point tel que M ou C, dont la trajectoire est connue, et où l'on détermine facilement les forces.

Pour opérer au moyen du point C, il faudrait chercher la force Y, qui, appliquée en ce point, tiendrait lieu sur la machine, de la force constante Q, appliquée en M ; or on doit avoir, en vertu de la relation déjà établie :

$$Q = \frac{Y}{OM}\ ON$$

D'où

$$Y = \frac{Q}{ON}\ OM$$

Les ordonnées correspondant à C_0 et C_1 sont infinies, attendu que, pour ces positions,

$$ON = 0$$

la courbe des valeurs de Y présente l'allure indiquée, figure 109, les surfaces bordées de hachures, et désignées par les lettres a, b, b', c, d, d', sont équivalentes à celles désignées au numéro précédent par les mêmes lettres, et peuvent donc servir au calcul du volant, toutefois, dans ce cas particulier, il serait impossible de trouver, par l'intégration

mécanique, la valeur des surfaces qui présentent une ordonnée infinie. Le procédé employé en premier lieu reste donc le seul pratique.

115. — Le volant ne se présente pas toujours sous forme d'une pièce détachée servant uniquement à un but de régularisation ; dans les machines à vapeur, la poulie ou l'engrenage de transmission servent de volant ; dans les roues hydrauliques et les turbines, la masse même de la machine est presque toujours suffisante pour assurer le degré de régularité voulu, à moins que les résistances ne varient à chaque tour dans de larges limites (7° fascicule, n° 61).

Le *coefficient de régularité n*, est donné par la nature des opérateurs à commander ; voici quelques-unes des valeurs qui peuvent être admises [1] :

Pompes..................................	20 à 30
Tissages et papeteries..................	40
Moulins à farine........................	50
Filatures (numéros gros.................	50 à 60
» (» fins................	100

Machines ordinaires actionnant des transmissions par courroie 35.
» » » » engrenages 50.

Deuxième cas

SYSTÈME COMPRENANT DES MASSES ANIMÉES D'UN MOUVEMENT ALTERNATIF.

116. — Lorsqu'on ne peut négliger la force vive des pièces à mouvement alternatif, soit à raison de leur masse, soit à cause de leur vitesse, la théorie générale n'est plus applicable, car l'équation des forces vives dépend de la composition du système, qui peut être diversifiée à l'infini. Il faut exprimer les forces vives de toutes les pièces en fonction de la vitesse de celle dont on veut régulariser le mouvement, et calculer de proche en proche, au moyen de l'équation des forces vives, et en se servant du diagramme du travail, la vitesse que prend cette pièce pour des positions équidistantes. En prenant la valeur ω_m de la vitesse la plus petite et ω de la vitesse la plus grande, on doit obtenir la vitesse de régime, connue *a priori* :

$$\Omega = \frac{\omega_m + \omega_M}{2}$$

1. Des Ingénieurs *Taschenbuch von dem Verein Hutte.*

S'il n'en était pas ainsi, on devrait recommencer le calcul des vitesses, en partant d'une valeur initiale plus grande ou plus faible que celle choisie d'abord. Lorsque la vérification a lieu, on en conclut que ω_M et ω_m étant les valeurs extrêmes de la vitesse pendant la période, le coefficient de régularité a pour valeur :

$$n = \frac{\omega_M - \omega_m}{\Omega} = 2\,\frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_M + \omega_m}$$

Si le coefficient de régularité ainsi obtenu n'est pas suffisant, on modifie les masses dans un sens convenable, et l'on applique à nouveau la méthode précédente.

La complication du problème provient de ce que les valeurs ω_M et ω_m qui se rapportent à la pièce à régulariser ne correspondent pas nécessairement aux valeurs extrêmes des forces vives de l'ensemble des masses ; de même, il est impossible de prévoir *a priori* quelles sont les masses à augmenter ou à diminuer pour obtenir l'effet voulu, il peut arriver qu'en augmentant ou en diminuant la masse de pièces à mouvement alternatif on agisse dans le même sens sur la régularité du mouvement de rotation d'une machine à vapeur, mais l'effet peut se produire en sens contraire, et dépend entièrement de l'agencement du système et des rapports numériques existant entre ses diverses parties.

117. — *Exemple 1. Mécanisme à cadre.* — Dans le système à cadre (fig. 110), on connaît le diagramme de l'effort P, la force Q est supposée constante ; soit m_1 la masse des pièces à mouvement alternatif, ω la vitesse angulaire de l'arbre à un instant quelconque, R le rayon de la manivelle, Σmr^2 le moment d'inertie du système tournant ; la force vive a pour expression :

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,\Sigma mr^2 + \frac{1}{2}\,m_1\,\omega^2 R^2 \sin^2\alpha$$

ou

$$\omega^2\left(\frac{1}{2}\,\Sigma\, mr^2 + \frac{1}{2}\,m_1 R^2 \sin^2\alpha\right)$$

On peut tracer le diagramme de l'effort moteur P sin α, et de la résistance Q, en portant en développement les arcs décrits par M ; si on dé-

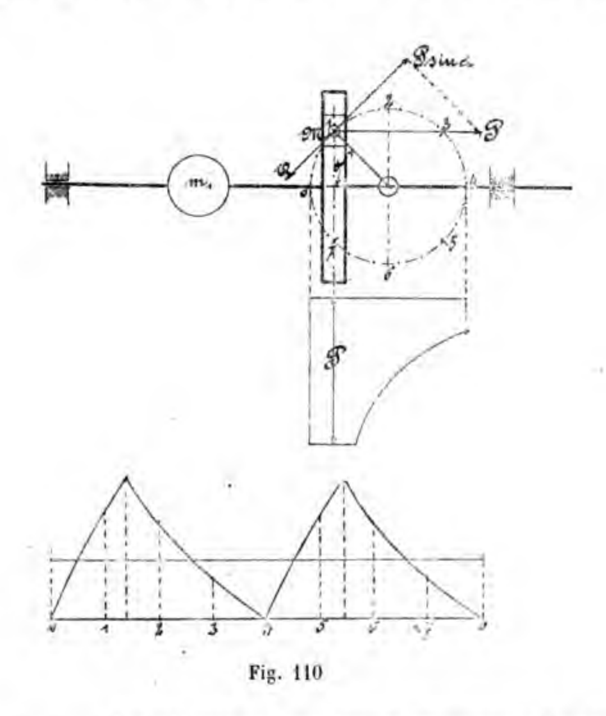


Fig. 110

signe par ω_0, ω_1, ω_2..., les vitesses angulaires correspondant aux positions 0, 1, 2, 3 etc., du bouton de manivelle, on aura :

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)\frac{1}{2}\Sigma mr^2 + (\omega_1^2 \sin^2 \alpha_1 - \omega_0^2)\frac{1}{2}m_1 R^2 = \int_0^{\alpha_1} (P \sin \alpha - Q)\, R d\alpha$$

Équation qui permettra de trouver ω_1 en fonction de ω_0
on a de même :

$$(\omega_2^2 - \omega_0^2)\frac{1}{2}\Sigma mr^2 + (\omega_2^2 \sin^2 \alpha_2 - \omega_0^2)\frac{1}{2}m_1 R^2 = \int_0^{\alpha_2} (P \sin \alpha - Q)\, R d\alpha$$

qui permettra de trouver ω_2, et ainsi de suite.

118. — *Exemple 2. Mécanisme à bielle.* — Proposons-nous de trou-

ver, à un instant quelconque, l'expression de la force vive de toutes les masses de ce système, en fonction de la vitesse angulaire ω de l'arbre ; soit m_1 la masse qui participe au mouvement de la crossette ; on démontre rapidement, par la considération du centre instantané de la bielle, que la vitesse de C (fig. 111), est $\omega \times \mathrm{ON}$, et que la vitesse d'un point intermédiaire G est $\omega \times \mathrm{OL}$, le point L étant obtenu en menant OL parallèle à IG, ou par la condition

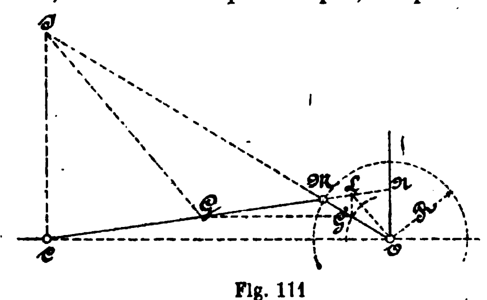


Fig. 111

$$\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{MN}}$$

On peut encore trouver le point L en menant GG' parallèle à CO, et G'L parallèle à ON [1]; pour un point particulier de la bielle, OG' est constant, il suffit donc de décrire la circonférence de rayon OG', qui peut servir pour toutes les positions.

La force vive du système comprend, à l'instant considéré

1° la force vive des pièces liées invariablement à l'arbre

$$(1) \qquad \omega^2 \Sigma m r^2$$

ou, en appelant A le moment d'inertie de ces pièces autour de l'axe de rotation :

$$A\omega^2$$

2° la force vive de la masse m_1 :

$$(2) \qquad m_1 \omega^2 \overline{\mathrm{ON}}^2$$

3° la force vive de la bielle, qui se compose de la force vive due au mouvement de translation de son centre de gravité, augmentée de celle due au mouvement de rotation autour de ce point ; la force vive de translation est, d'après ce qui a été trouvé, et en désignant par m_2 la masse de la bielle :

$$m_2 \omega^2 \overline{\mathrm{OL}}^2$$

1. Cette construction a été employée par M. Massau.

La vitesse angulaire de rotation de la bielle autour de son centre de gravité est

$$\omega \frac{MN}{b}$$

b étant la longueur de la bielle.

Si donc on désigne par ρ le rayon de giration de cette pièce pour un axe passant par le centre de gravité, la force vive due au mouvement de rotation devient :

$$\frac{m_2 \rho^2}{b^2} \omega^2 \overline{MN}^2$$

MN atteint toujours sa valeur maxima au point mort, pourvu que l'on ait $b > OM$, ce qui est nécessairement réalisé.

En résumé, la force vive totale de la bielle est

$$(3) \qquad m_2 \omega^2 \left(\overline{OL}^2 + \frac{\rho^2}{b^2} \overline{MN}^2\right)$$

(on peut construire graphiquement [1] l'expression ci-dessus).

La force vive du système se compose des quantités (1), (2) et (3), elle est ainsi :

$$\omega^2 \left[A + m_1 \overline{ON}^2 + m_2 \left(\overline{OL}^2 + \frac{\rho^2}{b^2} \overline{MN}^2\right)\right]$$

On peut, sans difficulté, employer la méthode générale (116) et trouver les valeurs de ω pour autant de positions que l'on voudra du point M.

Même cas. Méthode approchée. — Lorsque les pièces à mouvement alternatif ont peu de masse par rapport au volant, on peut évaluer leur force vive en supposant que ω est constant et égal à la vitesse de régime ; on a alors, au point mort, choisi pour position initiale : $OL = OG'$;

1. Dans le cas d'une bielle prismatique, $\rho^2 = \frac{b^2}{12}$

On a donc $\frac{\rho^2}{b^2} \overline{MN}^2 = \frac{\overline{MN}^2}{12}$ et la force vive (3) devient :

$$m_2 \omega^2 \left(\overline{OL}^2 + \frac{\overline{MN}^2}{12}\right)$$

qu'on peut construire au moyen d'un angle droit.

$MN = OM = R$; $ON = O$. Choisissons le point M, quelconque, comme position finale :

$$\frac{1}{2} A\omega_1^2 = \frac{1}{2} A\omega_0^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \left[m_2 \left(\overline{OG'}^2 - \overline{OL}^2 + \frac{\rho^2}{b^2}(R^2 - \overline{MN}^2)\right) - m_1 \overline{ON}^2\right] + t$$

t est l'excès positif ou négatif du travail moteur sur le travail résistant pendant la fraction de tour considérée, et résulte du diagramme de ces travaux.

119. — *Volants des machines à mouvement non périodique.* — Le volant est employé dans certaines machines à mouvement non périodique telles que les laminoirs, les machines à forger, à poinçonner, à cisailler etc., qui absorbent, d'une manière intermittente, de grandes quantités de travail ; le rôle du volant est alors tout spécial, il sert à tenir en réserve le travail moteur développé pendant un temps plus ou moins long, pour le restituer dans la période très courte où les résistances sont appliquées à la machine. Ces volants doivent donc être calculés de manière à ce que leur demi-force vive, acquise après un certain nombre de tours, ajoutée au travail que les actions motrices continuent à développer, puisse vaincre le travail résistant que l'on a en vue ; ils doivent être d'autant plus lourds, que le travail moteur développé par tour est plus faible en comparaison du travail résistant ; on ne pourrait les ramener aux dimensions des volants ordinaires qu'à la condition d'employer une machine motrice beaucoup plus puissante et dont la marche aurait l'inconvénient d'être intermittente.

L'énergie d'un volant en marche a pour mesure

$$\frac{1}{2} A\omega^2$$

elle augmente donc rapidement avec la vitesse, malheureusement, la force centrifuge qui tend à rompre la jante et les bras, augmente dans le même rapport, et rend très difficile la construction des volants à grande vitesse. L'inertie de la jante soumet les bras à la flexion et tend à les briser lors dé l'application brusque de la résistance. Les volants des laminoirs, à raison de l'importance des efforts qui sont en jeu, doivent satisfaire à des conditions spéciales de construction [1].

1. On fait même usage des volants dont la jante est constituée par un enroulement en fil d'acier agissant comme un frettage (Fabrication des tubes par le procédé Mannesman).

120. — *Position à donner aux volants.* — Tous les organes de transmission situés entre l'action motrice et le volant supportent des fatigues qui ne dépendent que de cette action motrice; au contraire, les éléments compris entre le volant et la résistance à vaincre sont fatigués en raison de la résistance. Il convient donc de placer le volant aussi près que possible de l'action la plus variable: ainsi, dans les machines à vapeur, le volant fait partie du moteur; par contre, lorsque l'on doit commander des opérateurs à résistance très variable, il convient de leur attribuer, à chacun, une certaine partie du volant.

§ II

DES RÉGULATEURS

121. — Le régulateur proprement dit doit agir automatiquement pour diminuer le travail moteur lorsque celui-ci dépasse le travail résistant de la période, ou vice-versa; il ne saurait donc maintenir la vitesse rigoureusement constante, attendu qu'il ne peut intervenir que par suite d'une modification de la vitesse; d'ailleurs, dans tous les moteurs à mouvement périodique, la vitesse varie, dans chaque période, entre les limites définies par le coefficient de régularité du volant, le régulateur ne doit agir qu'en dehors de ces limites.

Le régulateur est surtout applicable aux machines dans lesquelles on emploie un fluide comme véhicule de l'action motrice, et son action s'exerce alors de trois manières différentes :

1° par étranglement de la section d'arrivée du fluide (moteurs hydrauliques, moteurs à vapeur).

2° par diminution du volume d'introduction (machines à vapeur).

3° par suppression momentanée d'introduction (moteurs à gaz).

Nous n'avons pas à étudier ici le mode d'action du régulateur, c'est-à-dire sa liaison avec le mécanisme à régulariser, il nous suffit de supposer que cette liaison est opérée d'une manière efficace, ce qui aura lieu, en effet, si, pour la vitesse la plus grande que l'on accepte à l'arbre du régulateur, la machine ne développe que la quantité de travail moteur nécessaire pour vaincre ses résistances passives, tandis que, pour la vitesse la plus faible permise, la machine développe tout le travail dont elle est

susceptible[1]. Nous supposons encore que la distribution de l'action motrice reste sous la dépendance du régulateur pendant toute la course de celui-ci.

Le travail moteur développé par les régulateurs se mouvant même dans toute l'étendue de leur course, est très faible, ils ne peuvent actionner que des mécanismes peu résistants, et l'on se trouve parfois obligé de les faire agir par l'intermédiaire d'une force motrice étrangère, ou d'un *servo-moteur*. Il en est ainsi pour les vannes des moteurs hydrauliques, où le régulateur détermine la mise en action d'un embrayage. Dans le turbo-moteur de Parson, le régulateur agit sur un servo-moteur à air raréfié ; le régulateur à énergie de vapeur de M. Von Luhde comprend un petit cylindre à vapeur auxiliaire ayant quelque analogie avec les appareils de changement de marche des grandes machines réversibles.

L'étude des organes régleurs ne peut être séparée de celle des récepteurs auxquels ils sont appliqués.

Le fonctionnement du régulateur est déterminé par l'équilibre qui s'établit entre les forces d'inertie de certaines masses qui entrent dans sa composition, et des forces antagonistes empruntées soit à des contrepoids, soit à des ressorts. Les appareils à contrepoids comprennent, comme cas particulier, celui où le poids des masses dont on emprunte l'inertie est lui-même la force antagoniste.

A. — RÉGULATEURS A CONTREPOIDS

122. — Dans le pendule conique, attribué à Watt, et qui a servi de point de départ à tous les autres, deux bras sont articulés à une traverse calée sur un arbre vertical, et sont reliés, au moyen de bielles, à un manchon qui peut se déplacer en glissant dans le sens de la hauteur.

Chaque valeur de la vitesse angulaire détermine une position particulière des bras, le mouvement de l'appareil régleur est pris sur le manchon. Dans le but de donner à ce régulateur des propriétés spéciales qui ne pourront être définies que par la suite, on a imaginé un grand nombre de dispositions, qui peuvent toutefois se rattacher à quelques types ; la confusion que l'on a faite entre plusieurs propriétés très différentes, a engagé beaucoup d'inventeurs dans une fausse voie ;

1. Cela veut dire que le régulateur étant au sommet de sa course, le canal d'arrivée doit être fermé, ou l'introduction nulle, et vice versa.

MM. Ch. Beer et Dwelshauvers-Dery [1] ont sérieusement contribué, par l'examen qu'ils ont fait du rôle des résistances passives, à préciser le problème, et à redresser certaines erreurs qui avaient cours il y a quelques années au sujet de l'isochronisme ; nous tiendrons compte, avec eux, de la résistance appliquée au manchon, et qui change de sens avec le mouvement, en remplaçant toutefois les calculs laborieux [2] auxquels on est conduit dans l'application, par la méthode semi-graphique employée par M. Léauté [3].

(M. Herrmann [4] a appliqué aux régulateurs à force centrifuge une méthode entièrement graphique).

La valeur d'un régulateur est caractérisée par un certain nombre de qualités, parmi lesquelles les plus importantes sont :

la sensibilité ;

la régularité ;

l'isochronisme ;

l'énergie.

Pour bien fixer le sens de ces termes, nous prendrons d'abord le cas d'un régulateur de Watt, dans la construction duquel nous introduirons des rapports simples, de manière à éviter toute complication de calcul. Nous supposerons, ainsi qu'on le fait d'ordinaire, que le régulateur prend instantanément la position qui correspond à l'équilibre statique des forces en jeu, condition qui n'est réalisée dans la pratique qu'après un certain nombre d'oscillations.

Soit, dans l'appareil (fig. 112),

P le poids de chaque boule ;

Q la moitié du poids du manchon, portée par l'articulation O', comprenant aussi, le cas échéant, la composante verticale due au mécanisme de liaison du manchon avec l'appareil régleur ;

F la résistance appliquée à chaque articulation O', dirigée toujours en sens contraire du mouvement ;

$$OO = O'O' = 2a$$

$$OM = O'M = \frac{1}{2} OB = l$$

1. *Théorie nouvelle des régulateurs.* — Liège, Desoer. 1887. — *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*, 1889, p. 33.

2. Uhland. — *Handbuch fur den Praktischen Maschinen-Construkteur*, vol. I, p. 236. — dito supplément, p. 112.

3. *Note sur les régulateurs*, etc., par M. Léauté — Appendice à l'ouvrage : *Eléments de construction des machines*, par W. C. Unwin. — Paris, Gauthier-Villars.

4. G. Herrmann. — *Die Graphische Untersuchung der Centrifugal Regulatoren.* Berlin, Springer, 1886.

α l'angle des bras avec la verticale.

Le poids des bras et des bielles est négligé, ainsi que le frottement sur les articulations O, M, O', qu'on doit s'attacher à rendre insignifiant en pratique.

L'équilibre doit être examiné séparément pour l'ouverture et la fermeture des bras, attendu que, par suite du changement de sens de la force F, l'état de sollicitation est différent pour ces deux mouvements.

En appelant ω' et ω'' les vitesses angulaires correspondant à la valeur de α, pour l'ouverture et la fermeture, respectivement, on a :

$$\omega'^2 = g \frac{P + Q + F}{P(a + 2l \sin\alpha)} tg \tag{1}$$

$$\omega''^2 = g \frac{P + Q - F}{P(a + 2l \sin\alpha)} tg\,\alpha \tag{2}$$

On peut construire un diagramme donnant, pour chaque position du

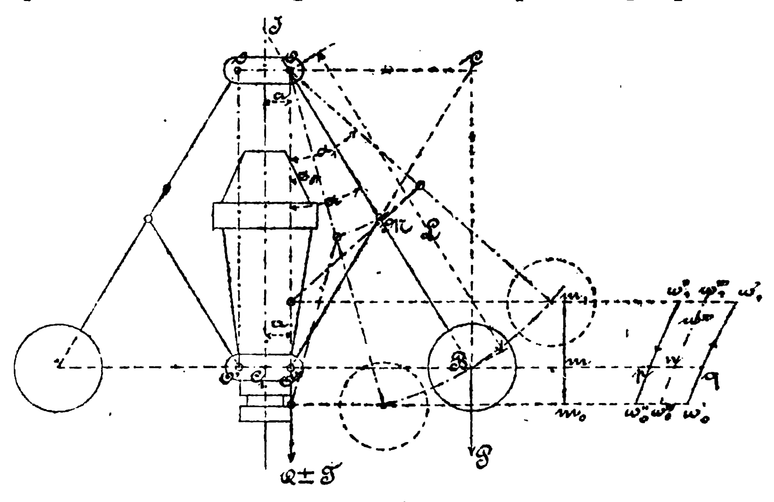


Fig. 112

manchon, donc pour chaque valeur de α, les vitesses angulaires ω' et ω'' (fig. 112). On voit que, pour toute vitesse comprise entre ces valeurs, le manchon reste en équilibre ; en d'autres termes, si $m_0 m_1$ est la course du manchon correspondant à l'angle $\alpha_1 - \alpha_0$ décrit par les bras, et si on suppose que le manchon occupe une position m, intermédiaire, le régulateur n'entre en action que pour une vitesse supérieure à mq, ou pour une vitesse inférieure à mp.

123. — *Sensibilité*. — Il faut évidemment que les valeurs ω' et ω'' ne soient pas trop écartées, sinon l'appareil serait paresseux, ou peu sensible, mais par contre, l'écart entre ω' et ω'', rapporté à la vitesse moyenne

$$\frac{\omega' + \omega''}{2}$$

doit être au moins égal à l'écart de vitesse du volant, rapporté à cette même vitesse (112).

Posons

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\omega' - \omega''}{\frac{\omega' + \omega''}{2}}$$

μ caractérise la sensibilité pour la position considérée du manchon, c'est-à dire, la propriété que possède le régulateur d'intervenir pour un léger écart de vitesse en dehors des maxima et minima du volant.

On tire des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{\omega' - \omega''}{\frac{\omega' + \omega''}{2}} = 2\,\frac{\sqrt{P + Q + F} - \sqrt{P + Q - F}}{\sqrt{P + Q + F} + \sqrt{P + Q - F}}$$

La sensibilité, pour ce régulateur en particulier, est donc indépendante de α.

Lorsqu'on fait abstraction de F, on obtient, pour l'ouverture et la fermeture, une courbe unique, donnée par :

$$(4) \qquad \omega'''^2 = g\,\frac{P + Q}{P\,(a + 2\,l \sin \alpha)}\,tg\,\alpha$$

Par combinaison avec les équations (1) et (2), on obtient :

$$\omega'^2 - \omega'''^2 = \frac{g\,tg\,\alpha}{P\,(a + 2\,l \sin \alpha)}\,F$$

$$\omega'''^2 - \omega''^2 = \frac{g\,tg\,\alpha}{P\,(a + 2\,l \sin \alpha)}\,F$$

ou encore :

$$\omega'^2 - \omega'''^2 = \frac{F}{P + Q}\,\omega'''^2$$

$$\omega'''^2 - \omega''^2 = \frac{F}{P + Q}\,\omega'''^2$$

Dans tous les cas où F est faible relativement à P + Q, on peut écrire:

$$\omega' = \omega''' + \frac{F}{2(P+Q)}\,\omega''' \tag{5}$$

$$\omega'' = \omega''' - \frac{F}{2(P+Q)}\,\omega''' \tag{6}$$

c'est-à-dire que la vitesse ω''' est la moyenne arithmétique entre ω' et ω'' ou que $nq = pn$ (fig. 112).

La sensibilité μ est alors donnée approximativement par l'équation:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\omega' - \omega''}{\omega'''} = \frac{F}{P+Q} \tag{7}$$

μ est d'autant plus grand que F est plus faible en comparaison de P + Q, propriété que l'équation (3) permettait aussi de découvrir.

Lorsque les courbes ω', ω'', sont très rapprochées, ce qui arrive lorsque les résistances à vaincre sont très faibles, l'écart peut ne pas être suffisant pour permettre à la vitesse d'osciller entre les limites permises par le volant, et le manchon monte et descend à chaque période; ce déplacement périodique, lorsqu'il n'est pas fort prononcé, ne nuit pas à l'action de certains appareils régleurs, il contribue à donner au coefficient de frottement sa valeur du mouvement (1); il peut arriver en effet, lorsque la charge des moteurs ne varie qu'à de longs intervalles, que la résistance du régulateur soit accrue par la cohésion des huiles.

Pour augmenter la sensibilité, il faut augmenter P + Q, l'équation (4) montre qu'en augmentant P seulement, ω''' diminue (régulateur à grosses boules tournant lentement); l'augmentation de Q a au contraire pour effet d'augmenter ω''', bien qu'elle agisse dans le même sens sur la sensibilité; on obtient ainsi des régulateurs à fort contrepoids tournant vite.

On se réserve toujours, en construisant les régulateurs, le moyen d'écarter à volonté les courbes ω' et ω''; à cet effet, on introduit, parmi les résistances passives dont l'ensemble forme la valeur de F, une cataracte à huile, ou *dash-pot*; on limite aussi, par ce moyen, les oscillations du régulateur qui résultent d'une action trop brusque (140).

1. On a réalisé un régulateur dit *à mouvement louvoyant*, dans lequel on donne au frottement sa valeur du mouvement, en maintenant l'organe régleur dans un état de rotation continue. — *Industrie moderne*, 1890, p. 272.

124. — *Régularité.* — Il résulte encore de l'examen du diagramme (fig. 112), que l'écart entre les valeurs extrêmes de la vitesse ne peut dépasser

$$\omega_1' - \omega_0''$$

cet écart, rapporté à la vitesse moyenne, mesure l'irrégularité du régulateur, si donc on appelle ν le coefficient de régularité, on posera:

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{\omega_1' - \omega_0''}{\omega_1' + \omega_0''} \tag{8}$$

Le coefficient ν ne doit pas être confondu avec la quantité que nous avons désignée par n dans la théorie du volant; en se reportant à ce qui a été dit de la sensibilité au numéro précédent, on voit au contraire que l'on aura nécessairement

$$\nu < n$$

sinon, le régulateur devrait, à chaque période, osciller entre ses deux positions extrêmes.

La *sensibilité* et la *régularité* sont plus ou moins liées, un régulateur peu sensible est nécessairement peu régulier; d'autre part un régulateur pourrait être sensible (courbes ω' et ω'' rapprochées) et être peu régulier (courbes ω' et ω'' inclinées). D'après M. Marié [1] pour qu'un régulateur soit dans de bonnes conditions, il faut qu'on ait, dans notre système de notations,

$$\frac{1}{\mu} \overline{<} \frac{1}{5} \times \frac{1}{\nu}$$

sinon, les oscillations seraient à craindre.

125. — *Energie.* — Tous les mécaniciens n'attribuent pas à ce mot la même signification; il nous semble rationnel d'appeler ainsi l'effort que peut vaincre le manchon, lorsqu'il se trouve dans une position donnée d'équilibre, et que la vitesse vient à varier d'une *certaine fraction* de sa valeur. L'énergie est une fonction qui permet de comparer les régulateurs, et donne la mesure de leur aptitude à vaincre, à course de manchon égale, des résistances F plus ou moins grandes. Plus un

1. Les régulateurs de vitesse. — *Annales des Mines*, 1887, p. 202, étude très intéressante au point de vue surtout des appareils régleurs.

régulateur est énergique, et mieux il convient pour actionner par exemple, une valve présentant beaucoup de résistance, ou un système dans lequel F présente de grandes variations, à la condition que la comparaison soit faite avec un régulateur de même course.

Pour mesurer l'énergie, on doit supposer le régulateur libre, c'est-à-dire non soumis à la force F, puisque celle-ci constitue l'une des actions à vaincre.

On a pour le régulateur sans résistance l'équation (4) du n° **123**:

$$\omega'''^2 = g \frac{P + Q}{P\,(a + 2\,l \sin\alpha)}\; tg\;\alpha$$

Si l'on fait $\omega''' = \omega'''\,(1 + \delta)$, il y aura au manchon, pour la même valeur de α, une force disponible $2\,Y$, telle que:

$$\omega'''^2\,(1 + \delta)^2 = g \frac{P + Q + Y}{P\,(a + 2\,l \sin\alpha)}\; tg\;\alpha$$

d'où, si δ est faible, et inférieur par exemple à $\frac{1}{10}$:

$$2Y = 4\delta \frac{\omega'''^2}{g}\; P\; \frac{a + 2\,l \sin\alpha}{tg\;\alpha}$$

En tenant compte de l'équation (4) et remarquant que l'énergie θ, n'est autre chose que la force disponible $2\,Y$, on a

$$\theta = 4\delta\,(P + Q) \qquad (9)$$

Pour le régulateur considéré, θ est proportionnel à $P + Q$. Toute modification qui augmente la sensibilité augmente donc aussi l'énergie, ce qui devait être.

126. — *Travail d'un régulateur.* — L'énergie n'est que l'un des facteurs du travail, on pourrait toujours, si la course de l'organe à commander n'était pas imposée, disposer des bras de levier de la liaison entre le régulateur et l'appareil régleur, de manière à multiplier l'effort dans une mesure quelconque. L'énergie du régulateur n'a de valeur que par le travail qu'elle peut effectuer; si l'on veut faire la comparaison entre différents régulateurs au point de vue du travail disponible sur le

manchon, il suffira de multiplier leur énergie par la course totale du manchon.

127. — *Isochronisme.* — L'isochronisme, qu'on appelle aussi *astaticité* [1], est la propriété que possèdent certains régulateurs dans lesquels toute valeur de l'angle α convient à la vitesse angulaire de régime, et à cette vitesse seulement. C'est-à-dire que le régulateur isochrone intervient pour peu que la vitesse se modifie, et conserve cette position, qu'elle qu'elle soit, lorsque la machine a repris sa vitesse de régime.

En cherchant à réaliser des régulateurs isochrones, on a eu en vue de remédier à un défaut évident de l'appareil (fig. 112), que nous avons jusqu'ici étudié comme type; en effet, il est visible, d'après son diagramme, que si sa sensibilité n'est pas *inférieure* au coefficient de régularité du volant, il amènera nécessairement, après avoir modifié la distribution du travail moteur, une vitesse autre que celle de régime, car, s'il pouvait ramener celle-ci, l'appareil régleur serait remis dans la position qui avait amené la perturbation.

Le diagramme du régulateur isochrone serait composé de deux droites parallèles à l'axe sur lequel nous comptons les déplacements du manchon (fig. 113); on voit immédiatement que, pour ce régulateur, on aurait

$$\mu = \nu$$

Fig. 113

et qu'il ne satisferait pas à la condition indiquée au n° 124; son défaut serait d'agir sans mesure et dans toute l'étendue de sa course, pour la variation la plus légère de vitesse en dehors des limites ω' et ω'' [2]; mais il aurait, par contre une régularité aussi élevée que possible.

On appelle régulateurs *pseudo-isochrones* ceux qui se rapprochent, par leurs propriétés, de celui que nous venons d'analyser; les systèmes de Farcot, Rankine, Tchebitcheff, Buss, Andrade, etc., appartiennent à cette catégorie; l'isochronisme est mesuré par ε dans l'équation:

$$(10) \qquad \frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{\omega_1''' - \omega_0'''}{\omega_1''' + \omega_0'''}.$$

1. MM. Ch. Beer et Dwelshauvers-Dery attribuent au mot astaticité un sens spécial, différent d'isochronisme.

2. On peut dire que ce régulateur manquerait de *stabilité*; ainsi apparaît une nouvelle propriété du régulateur caractérisée par l'*inclinaison* des courbes ω' et ω''; la stabilité est l'inverse de l'isochronisme.

Le régulateur de Watt, pour présenter un degré de régularité élevé, doit presque toujours avoir des dimensions qui le rendent peu pratique; le système de Porter où $a = o$, celui de Farcot, dans lequel a est négatif, ne sont que des régulateurs de Watt, améliorés au point de vue de l'isochronisme ; M. Léauté décrit (ouvrage cité) un système de contrepoids imaginé par lui dans le même but ; on a aussi, depuis longtemps, employé un contrepoids agissant sur le manchon par l'intermédiaire d'un levier coudé, et destiné à le soulager au fur et à mesure que l'angle α des bras augmente.

Pour l'étude des régulateurs pseudo-astatiques, il ne suffit pas, en général, de s'assurer au moyen du calcul des vitesses au bas et au sommet de la course du manchon, que l'on a atteint les degrés d'isochronisme et de sensibilité voulus, il faut encore que le diagramme ne

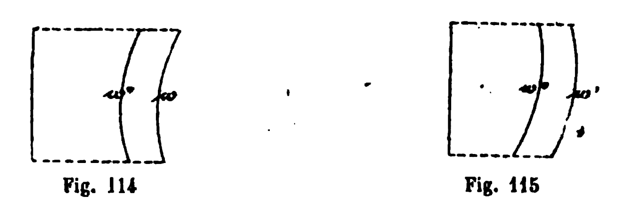


Fig. 114 Fig. 115

puisse présenter l'une des formes défectueuses des figures 114 et 115, auquel cas l'appareil régleur agirait à contre-sens pendant une partie de la course du manchon.

I. — Régulateurs du premier genre [1].

128. — Le type de ces régulateurs est représenté (fig. 116) ; le bras oscille autour du point O, qui est fixe par rapport à l'arbre.

Soient :

L, la longueur OA des bras,

α, l'angle des bras sur la verticale,

1. Nous divisons les régulateurs, à l'exemple de M. Léauté, en appareils du 1er genre, dans lesquels les bras qui portent les boules oscillent autour de points fixes en hauteur, et appareils du second genre, où ces articulations se meuvent avec le manchon.

l, la distance OB obtenue en prolongeant O'M jusqu'à sa rencontre en C avec l'horizontale de O, et en menant la verticale CB.

h, la distance ID,

P, le poids d'une boule,

Q, le poids appliqué à chaque articulation du manchon,

F, la résistance à vaincre par chaque articulation.

Les équations d'équilibre sont, pour la position considérée, à l'ouverture:

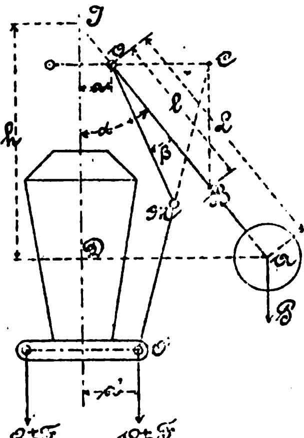


Fig. 116

$$\omega'^2 = g\,\frac{P\frac{L}{l} + Q + F}{P\frac{L}{l}\,h} \tag{1}$$

et à la fermeture:

$$\omega''^2 = g\,\frac{P\frac{L}{l} + Q - F}{P\frac{L}{l}\,h} \tag{2}$$

La sensibilité est donnée par μ dans l'équation ci-dessous:

$$\frac{1}{\mu} = 2\,\frac{\omega' - \omega''}{\omega' + \omega''} = 2\,\frac{\sqrt{P\frac{L}{l} + Q + F} - \sqrt{P\frac{L}{l} + Q - F}}{\sqrt{P\frac{L}{l} + Q + F} + \sqrt{P\frac{L}{l} + Q - F}} \tag{3}$$

La sensibilité n'est pas constante pour toutes les positions du manchon, attendu que *l* est variable.

On aurait, pour le régulateur sans résistances:

$$\omega'''^2 = g\,\frac{P\frac{L}{l} + Q}{P\frac{L}{l}\,h} \tag{4}$$

$$\omega'^2 - \omega'''^2 = \omega'''^2 - \omega''^2 = \omega'^2\,\frac{F}{P\frac{L}{l} + Q}$$

Dans tous les cas où F est faible à côté de $P \frac{L}{l} + Q$, on peut écrire

$$\omega' = \omega''' \left(1 + \frac{F}{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right)}\right) \tag{5}$$

$$\omega'' = \omega''' \left(1 - \frac{F}{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right)}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\omega' - \omega''}{\omega'''} = \frac{F}{P\frac{L}{l} + Q} \tag{7}$$

$\frac{\omega' - \omega''}{\omega'''}$ constitue une valeur approchée de $\frac{1}{\mu}$.

On peut, pour augmenter la sensibilité :

1° augmenter $\frac{L}{l}$, auquel cas l'équation (4) indique que la vitesse ω''' est diminuée ; par cette modification, le régulateur devient plus grand, ou bien la course du manchon diminue.

2° Augmenter P ; ce qui diminue ω'''.

3° Augmenter Q, la vitesse ω''' est augmentée (Porter).

L'énergie a pour expression :

$$\theta = 4\frac{P}{g}\omega'''^2 h \frac{L}{l} \delta$$

ou bien, en tenant compte de l'équation (4)

$$\theta = 4\left(P\frac{L}{l} + Q\right)\delta$$

L'énergie augmente donc en même temps que la sensibilité ; elle ne reste pas constante pour toute la course du manchon, l étant variable d'une position à l'autre.

La régularité ν, est donnée approximativement par l'expression ci-dessous, chaque fois que F est faible à côté de $P\frac{L}{l} + Q$; on évalue

alors ω_1' et ω_0'' en fonction de ω_1''' et ω_0''', au moyen des équations (5) et (6); la vitesse moyenne est prise égale à $\frac{1}{2}$ $(\omega_1' + \omega_0'')$.

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{\omega_1' - \omega_0''}{\omega_1' + \omega_0''} = 2\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

où

$$r = \frac{2\,(\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_0) - \mathrm{F}l_0}{2\,(\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_1) + \mathrm{F}l_1}\sqrt{\frac{h_1\,(\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_1)}{h_0\,(\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_0)}}$$

Les quantités l_0, h_0, l_1, h_1, peuvent être mesurées sur un tracé en vraie grandeur; les erreurs faites dans le relevé des dimensions étant du même ordre que celles commises dans l'exécution de l'appareil lui-même, cette marche peut être suivie sans inconvénient.

L'isochronisme, ε, est fourni par l'équation:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{\omega_1''' - \omega_0'''}{\omega_1''' + \omega_0'''} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\frac{\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_0}{\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_1} \times \frac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\frac{\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_0}{\mathrm{PL} + \mathrm{Q}l_1} \times \frac{h_1}{h_0}}}$$

129. — *Proportionnalité des régulateurs* [1]. — Lorsqu'on ne change rien au poids des boules et du manchon, la sensibilité, l'énergie, la régularité et l'isochronisme conservent la *même valeur* pour tous les régulateurs semblables, c'est-à-dire ayant leurs dimensions linéaires dans le même rapport, et fonctionnant entre les mêmes angles. La vitesse angulaire (ω''' ou ω' et ω'') varie en raison inverse de la racine carrée d'une dimension (Equation 4). La propriété ci-dessus n'est toutefois vraie, en ce qui concerne la sensibilité et la régularité, que si F reste constante avec les autres forces P et Q.

Lorsque la similitude s'étend aux dimensions linéaires des boules et du contrepoids comme à toutes les autres parties, la vitesse varie encore comme ci-dessus, l'énergie augmente comme le cube du rapport de similitude, et l'isochronisme reste constant.

Si F varie comme les autres forces, la sensibilité et la régularité conservent aussi une valeur constante; si, au contraire, F n'augmente pas aussi vite que le poids des boules ou le contrepoids du manchon, la sensibilité et la régularité s'améliorent.

1. Ch. Beer et Dwelshauvers-Dery. – Ouvrage cité.

Lorsque F ne varie pas, la sensibilité augmente comme le cube du rapport de similitude.

Le travail disponible au manchon varie à la fois comme l'énergie, et comme la course du manchon, il est donc proportionnel à la quatrième puissance du rapport de similitude.

130. — *Régulateur de Watt et ses dérivés.* — On a pour ce régulateur (fig. 112) qui a déjà été examiné précédemment (122 à 126)

$$a' = a$$
$$\beta = o$$
$$OB = l = \text{constante}$$
$$IC_1 = h$$

En examinant l'influence de ces données sur les propriétés du régulateur, on établit facilement ce qui suit :

La sensibilité et l'énergie sont constantes quelle que soit la position du manchon.

La régularité ν est donnée approximativement par l'équation :

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

avec

$$r = \frac{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right) - F}{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right) + F}\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

qui se simplifie encore dans le cas où $l = L$, comme dans la figure 112.

L'isochronisme ε sera tiré de la relation :

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}$$

L'isochronisme est donc d'autant plus parfait que $\frac{h_1}{h_0}$ s'approche davantage de 1 ; or,

$$h = L\cos\alpha + a\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

On peut choisir pour a une valeur telle que h varie infiniment peu relativement à α, on aura alors:

$$\frac{dh}{d\alpha} = o = -\left(\text{L} \sin \alpha + \frac{a}{\sin^2 \alpha}\right)$$

ce qui donne:

$$a = -\text{L} \sin^3 \alpha$$

α étant variable, on voit que le régulateur ne saurait être isochrone, mais on peut obtenir un isochronisme plus que suffisant en prenant

$$a = -\text{L} \sin^3 \alpha_0$$

Les bras du régulateur, de même que les bielles, seraient croisés (Régulateur Farcot, fig. 117). Si les articulations étaient plus éloignées de l'axe, le régulateur agirait à contre sens au bas de sa course.

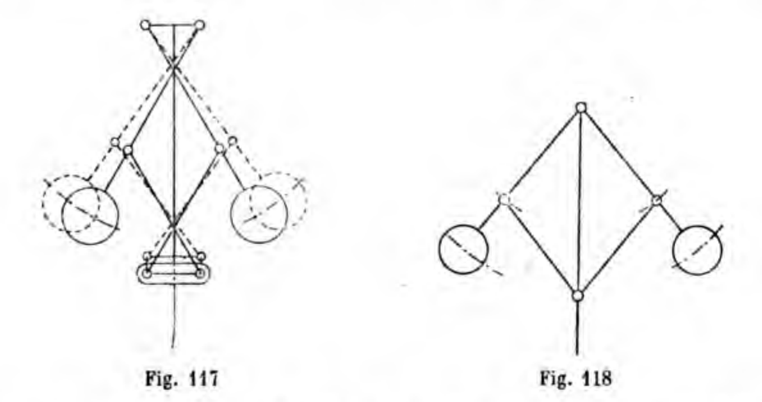


Fig. 117 Fig. 118

Pratiquement, il est assez rare que l'on adopte des valeurs de a négatives ; on réalise un isochronisme assez satisfaisant en faisant $a = o$; si l'on prend en même temps $a' = o$, ce qui, à la vérité, donne lieu à des difficultés de construction (fig. 118), on a :

$$h_0 = \text{L} \cos \alpha_0$$

$$h_1 = \text{L} \cos \alpha_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2 \frac{1 - \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}}}{1 + \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}}}$$

Soit :

$$\alpha_0 = 25^\circ$$

$$\alpha_1 = 32^\circ$$

On trouve :

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{3.35}{100} \text{ environ}$$

ou

$$\varepsilon = 29{,}9.$$

Cet isochronisme est très suffisant pour la plupart des applications, mais on voit qu'il ne peut être obtenu qu'en limitant l'ouverture des bras, ce qui oblige, pour une course de manchon donnée, à faire usage de régulateurs assez grands.

Il existe beaucoup de régulateurs dans lesquels on fait $a = o$ et où l'on adopte une valeur a' telle que les pivots des fourches inférieures puissent passer à côté de l'arbre ; a' est donc légèrement supérieur à la somme obtenue en ajoutant le rayon du pivot et celui de l'arbre (fig. 119).

Dans le régulateur de *Kley* (fig. 120), a est négatif, a' est positif.

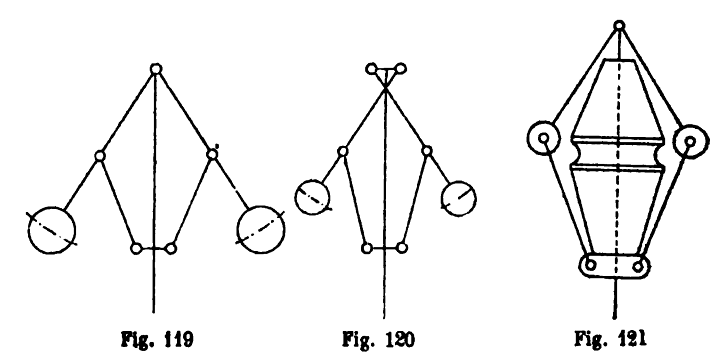


Fig. 119 Fig. 120 Fig. 121

Toutes les modifications indiquées ci-dessus peuvent être appliquées au régulateur de Porter, dont l'une des formes est représentée **fig. 121**. Il n'y a, entre cet appareil et celui de Watt, aucune différence de principe; l'énergie y est obtenue au moyen d'un très lourd contrepoids, on atteint facilement ainsi une grande sensibilité ; toutefois, pour équilibrer Q, la vitesse de rotation (ω''') doit augmenter, d'autant plus que le poids des boules est faible, et que la longueur des bras n'est pas supérieure à celle des bielles.

Les régulateurs à rotation rapide présentent des difficultés de construction assez grandes, car l'axe de rotation doit coïncider avec l'axe principal d'inertie du système, sous peine d'amener des vibrations latérales.

131. — *Régulateur de M. Ch. Beer.* — La maison Beer a créé une série de régulateurs complètement étudiés, appartenant au premier genre (fig. 122); les bras sont coudés et supportent le manchon au moyen d'un galet (fig. 117).

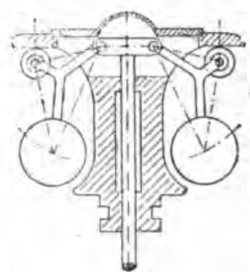


Fig. 122

Les équations générales sont entièrement applicables à ce dispositif, qui reste excellent pour une amplitude de α variant entre 25° et 35°. La série comprend 12 numéros, voici quelques unes des données relatives au n° 6:

$$2\,(P + Q) = 127^{k}50$$

2 F, EN KILOG.	COURSE EN M/M	μ	ν
4	51	30	15
3	44	40	20
2	36	60	30

Dans ces régulateurs, la sensibilité est double de la régularité.

Nous pouvons encore citer, comme appartenant à cette classe, le régulateur parabolique de Galloway [1].

II. — RÉGULATEURS DU SECOND GENRE

132. — Les bras qui portent les boules sont articulés au manchon (fig. 123).

1. *Engineering*, 1883, 2e semestre, page 537.

L'équilibre donne pour l'ouverture :

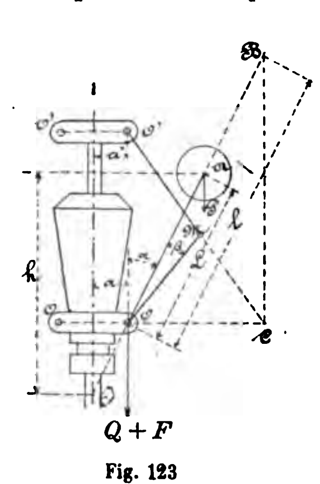


Fig. 123

$$\omega'^2 = g \frac{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q + F}{P \frac{L}{l} h}$$

et pour la fermeture :

$$\omega''^2 = g \frac{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q - F}{P \frac{L}{l} h}$$

L'équation du régulateur sans résistance serait :

$$\omega'''^2 = g \frac{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q}{P \frac{L}{l} h}$$

Dans tous les cas où F est faible en comparaison de

$$P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q$$

on peut écrire, en suivant la même marche qu'au numéro 128 :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{F}{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q}$$

Toute modification qui augmente le dénominateur de cette fraction agit sur la sensibilité qui, du reste, dépend de l, et par conséquent de la hauteur du manchon.

L'énergie pour l'ensemble des deux boules est :

$$\theta = 4\left[P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q\right] \delta$$

et varie comme la sensibilité.

On a approximativement (1) :

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

1. Le calcul a été fait en supposant que F est faible en comparaison de $P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q$, auquel cas on peut opérer comme au n° 128.

avec

$$\nu = \frac{2\,[(Q+P)\,l_0 - PL] - Fl_0}{2\,[(Q+P)\,l_1 - PL] + Fl_1}\sqrt{\frac{h_1\,[(Q+P)\,l_1 - PL]}{h_0\,[(Q+P)\,l_0 - PL]}}$$

Le degré d'isochronisme ε est tiré de l'équation :

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\frac{h_1\,[(Q+P)\,l_0 - PL]}{h_0\,[(Q+P)\,l_1 - PL]}}}{1 + \sqrt{\frac{h_1\,[(Q+P)\,l_0 - PL]}{h_0\,[(Q+P)\,l_1 - PL]}}}$$

133. —*Régulateur de Prœll.* — On a généralement, dans ce régulateur, qui est identique à celui de la figure 123 :

$$a = a' = \frac{1}{6}\,OA$$

$$OM = 0.7\ L$$

$$\beta = 10^\circ$$

$$Q = 3P$$

$$\alpha_0 = 20^\circ$$

$$\alpha_1 = 30^\circ$$

134. — *Régulateur de Foucault.* — En faisant $\beta = o$ et $a' = a$, on obtient le régulateur de Foucault (fig. 124), dans lequel on a, de plus, $OM = \frac{L}{2}$.

On a toujours quel que soit l'angle des bras :

$$l = L$$

Il vient donc :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{F}{Q}$$

$$\theta = 4\ Q\delta$$

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{1 - \frac{2Q - F}{2Q + F}\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}{1 + \frac{2Q - F}{2Q + F}\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}$$

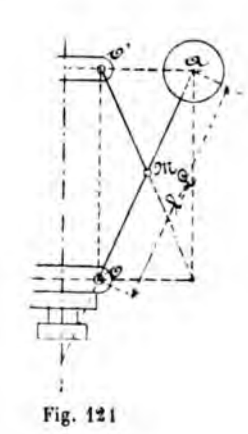


Fig. 121

Le poids des boules ne figure dans aucune des expressions qui caractérisent ce régulateur, l'équivalent de celui de Watt au point de vue de l'isochronisme, mais inférieur à celui-ci sous le rapport de la régularité et de la sensibilité, ce qui provient de ce que les boules équilibrent directement une partie du poids du manchon.

135. — *Régulateur Cosinus.* — Il comporte deux variétés à peu près équivalentes, nous n'étudierons que la plus répandue. Le pendule est à bras coudé (fig. 125), articulé en O au manchon, et comporte deux masses M, M' ; l'un des bras porte en outre un galet G, qui s'appuie sur un talon de l'arbre et reste ainsi à hauteur constante. Le pendule constitue la particularité la plus intéressante de ce régulateur ; pour analyser son mode d'action, nous suivrons une méthode élémentaire et directe, de préférence à celle plus générale, qui est exposée par M. Buss.

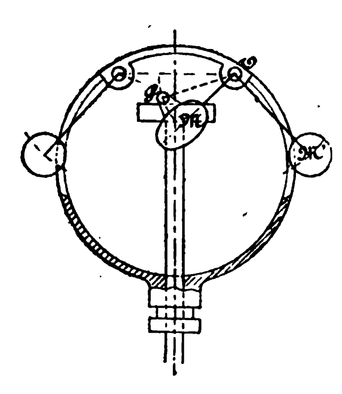


Fig. 125

Le pendule est composé approximativement de deux masses m, K^2m, montées en M et M' (fig. 126), aux distances $K\lambda$ et λ, respectivement, du point d'articulation O, sur des bras OM et O'M qui restent à angle droit. Ce système tourne autour d'un axe situé à la distance a de l'articulation O.

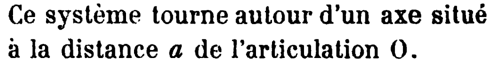


Fig. 126

Nous allons démontrer d'abord, qu'au point de vue du poids des boules, le double pendule peut être remplacé par une masse unique

$$(K^2 + 1)\, m$$

qui serait placée au pied de la perpendiculaire Op abaissée du point O sur MM'.

En effet, le poids de cette masse est égal à la somme des poids placés en M et M', et l'on a la proportion :

$$\frac{Mp}{pM'} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{K^2}{1}$$

Le point p divise donc M M' en deux segments qui sont dans le rapport inverse des poids appliqués en M et M'.

Nous allons chercher, en outre, le moment autour du point O des forces centrifuges des masses M et M'.

Cette somme est :

$$m\omega^2 (a - K\lambda \sin \beta)\ K\lambda \cos \beta + K^2 m\omega^2 (a + \lambda \cos \beta)\ \lambda \sin \beta$$

ou

$$m\omega^2 a K (\lambda \cos \beta + K\lambda \sin \beta)$$

ou encore :

$$m (1 + K^2)\ \omega^2 a \frac{K}{1 + K^2} (\lambda \cos \beta + K\lambda \sin \beta)$$

Le contour du triangle MOM', projeté sur l'horizontale donne :

$$\lambda \cos \beta + K\lambda \sin \beta = \lambda \sqrt{1 + K^2} \cos \gamma$$

On a aussi par les triangles semblables OpM' et MOM' :

$$Op = \frac{K\lambda}{\sqrt{1 + K^2}}$$

La somme des moments équivaut donc à :

$$(1) \qquad m (1 + K^2)\ \omega^2\ a \times Op \cos \gamma$$

c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à ω^2, et au cosinus de l'angle γ que fait le bras fictif Op avec la verticale ; toutes les autres quantités figurant dans l'expression sont constantes.

Etablissons la condition nécessaire pour que le pendule soit en équilibre sous l'action du contrepoids Q, de la réaction s'exerçant sur le galet, du poids de ses boules et de leur force centrifuge.

Soit : $\qquad Op = L,$

et faisons

$$(1 + K^2) m = M = \frac{P}{g}$$

P étant donc la somme des poids des boules ; la réaction sur le galet sera $P + Q$, et il vient pour l'équilibre, en tenant compte de la valeur (1) déjà trouvée pour le moment.

$$(2) \qquad \frac{P}{g} \omega^2 a L \cos \gamma = PL \sin \gamma + (P + Q)\ l_1 \sin (\sigma - \gamma)$$

Pour que ω^2 soit constant, il faut que γ disparaisse de l'équation, ce qui exige que l'on ait :

$$PL = (P + Q)\, l_1 \cos \sigma$$

ou

$$\cos \sigma = \frac{P}{P+Q} \frac{L}{l_1}$$

On peut toujours choisir les éléments du système pour qu'il en soit ainsi, l'équation (2) devient alors :

$$\frac{P}{g}\, \omega^2\, aL = (P + Q)\, l_1 \sin \sigma$$

Ce régulateur serait doué d'un isochronisme parfait, il serait donc instable ; aussi, on altère l'angle σ de manière à obtenir dans la course utile du manchon une certaine variation de vitesse assignée à l'avance, on prend $\cos \sigma < \frac{P}{P+Q}\, \frac{L}{l_1}$.

Pour des dimensions restreintes, le régulateur de Buss donne une course de manchon très grande, puisqu'on n'est pas tenu, comme avec tous les autres, de resserrer l'angle d'ouverture des bras (γ) entre des limites étroites, en vue d'arriver à un isochronisme satisfaisant ; à égalité d'énergie, il fournit un travail disponible supérieur à celui des autres régulateurs.

136. — *Observations générales.* — Dans les calculs qui précèdent, nous n'avons pas tenu compte du poids des bras, qui peut cependant jouer un rôle important dans les régulateurs à grande vitesse à boules fort petites ; on peut, dans ce cas exceptionnel, considérer le poids des fourches comme concentré aux articulations ; la partie prismatique ne donne pas lieu à de sérieuses difficultés ; on remarquera cependant, qu'au point de vue de la force centrifuge, on ne peut la supposer concentrée à son centre de gravité.

Pour établir un régulateur, le moyen le plus pratique est de fixer d'abord les dimensions de manière à ce qu'il forme, avec la machine, un ensemble satisfaisant ; on ne devra cependant pas perdre de vue que les petits moteurs demandent des régulateurs relativement plus grands (129). Lorsqu'on a fixé pour un régulateur de Watt, par exemple,

les dimensions linéraires, telles que la longueur des bras et des bielles, la distance a, et les angles limites, on en déduit la course du manchon ; on connaît la résistance et la course de l'appareil régleur, on en déduit la résistance F, ramenée au manchon du régulateur.

La régularité étant imposée, on choisit la vitesse moyenne du régulateur et on détermine ainsi les vitesses extrêmes ω'_1 et ω''_0 ; les deux équations d'équilibre à l'ouverture et à la fermeture appliquées à ces positions particulières, permettent de trouver P et Q.

Si l'on trouve pour P une valeur négative, c'est que les éléments choisis *a priori* ne conviennent pas pour réaliser la régularité voulue, il faut alors réduire a, α_0, α_1 ou avoir recours aux systèmes pseudo-astatiques.

On vérifie après coup si l'isochronisme et la sensibilité sont suffisants, et si l'énergie ne subit pas éventuellement de trop grandes variations, ce qui présenterait des inconvénients dans les cas d'une résistance constante à vaincre, il pourrait y avoir lieu alors de modifier la liaison entre le manchon et l'appareil régleur.

Il est prudent de construire au moins trois points du diagramme, à l'ouverture et à la fermeture, afin de s'assurer que la vitesse ne présente ni maximum ni minimum dans la zone active du régulateur.

Il serait impossible, du reste, de déterminer exactement *a priori* la valeur de F, qui peut varier dans des proportions inattendues par suite du moindre défaut de montage, aussi doit-on compter à l'avance sur un maximum de résistance, car si le fonctionnement accuse que le régulateur est trop sensible, on peut toujours parfaire la valeur de F en réglant le dash-pot en conséquence.

On ne peut compter non plus que les poids calculés seront rigoureusement réalisés après l'achèvement du régulateur, on se réserve le moyen, soit d'augmenter ou de diminuer Q, soit, ce qui est préférable au point de vue de l'élégance, de modifier la vitesse prévue ; dans ce dernier cas, on essaie le régulateur à l'atelier en le munissant de ses tringles de renvoi, et on détermine en conséquence le diamètre de sa poulie de commande ou le rapport des roues dentées qui doivent lui donner le mouvement [1].

1. On exige quelquefois que le moteur puisse tourner à deux vitesses différentes de régime ; le régulateur doit alors être à contrepoids mobile ou être actionné par des organes à rapport variable de vitesse. Dans le premier cas, il convient de baser le calcul sur la valeur la plus faible de la vitesse.

Les propriétés indiquées au n° 129, et qui s'appliquent aussi aux régulateurs du second genre, permettent de tirer d'un régulateur donné et dont on connaît les qualités, une série d'appareils convenant pour vaincre des résistances et effectuer des travaux différents.

B. — RÉGULATEURS A RESSORTS

137. — Les ressorts peuvent remplacer le contrepoids avec avantage: la disposition la plus simple consiste à placer sur le manchon un ressort à boudin qui entoure l'arbre et qui bute à son sommet contre une bague d'arrêt à laquelle on réserve un certain serrage. Ce système est employé depuis longtemps pour les régulateurs de petites dimensions, dans lesquels le contrepoids atteint un volume relatif très grand. Il est évident *a priori* que si la longueur du ressort est très grande relativement à la déformation qu'il subit entre les limites de la course du manchon, son action ne diffère en rien de celle du contrepoids ; comme l'emploi de ressorts de grande longueur présenterait beaucoup d'inconvénients, il n'y a pas analogie complète entre les deux systèmes, et pour l'étude des appareils de la classe B, nous devons emprunter à la théorie de l'élasticité la formule qui lie la déformation à l'effort nécessaire pour la produire.

Pour le ressort en hélice en fil rond, on a :

$$e = Q \frac{64\, nr^3}{Gd^4} \qquad (a)$$

e est la flèche produite, en millimètres.
Q l'effort longitudinal, en kilogrammes.
n le nombre de spires.
r le rayon du cylindre moyen, en millimètres.
d le diamètre du fil, en millimètres.
G le coefficient d'élasticité par glissement, dont la valeur varie de 8000 pour l'acier ordinaire, à 12000 pour l'acier fondu, trempé et recuit.

Cette formule peut s'écrire :

$$\frac{Q}{e} = \frac{Gd^4}{64\, nr^3} \qquad (b)$$

$\frac{Q}{e}$ est alors l'effort nécessaire pour produire une flèche de 1 millimètre [1].

L'effort qui correspond à une fatigue θ par millimètre carré de section est :

$$(c) \qquad Q_\theta = \frac{\pi}{16} \theta \frac{d^3}{r}$$

On peut faire $\theta = 40$ pour l'acier fondu.

On voit immédiatement que la substitution d'un ressort au contrepoids dans tous les régulateurs déjà examinés, ne peut qu'aggraver le défaut d'isochronisme, puisque Q augmente avec l'ouverture ; par contre, la force variable du ressort permet de réaliser d'autres combinaisons de leviers, possédant un isochronisme aussi grand qu'on le voudra, avec une énergie très grande sous un faible volume ; de plus, les régulateurs de cette espèce peuvent être placés dans une position horizontale.

Les régulateurs à ressort demanderaient une classification complète, ils comprennent des appareils se rattachant au premier genre, aussi bien que des régulateurs du genre Prœll [2] ; en outre ils peuvent être à arbre horizontal ou à arbre vertical, les masses se mouvant dans un plan passant par l'axe, mais toutes les pièces peuvent encore être placées dans un plan normal à l'axe de rotation, suivant un dispositif très répandu aujourd'hui.

Nous nous bornerons à examiner parmi les appareils de la première espèce, un régulateur employé dans beaucoup de machines locomobiles anglaises [3].

138. — *Régulateur de M. Wilson Hartnell.* — Les boules sont montées sur un bras renversé (fig. 127), qui renvoie le mouvement au manchon par l'intermédiaire d'un coude formant un angle de $90° + \beta$ un peu plus grand que l'angle droit ; la branche qui agit sur le manchon oscille symétriquement par rapport à l'horizontale.

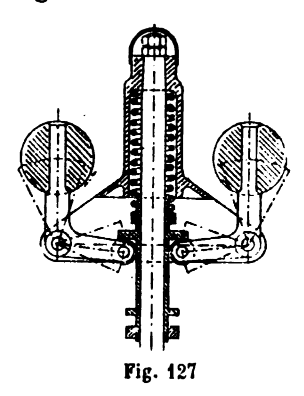
Les actions de poids sont très faibles comparées à celles du ressort, les boules étant toujours situées dans le voisinage de la verticale du

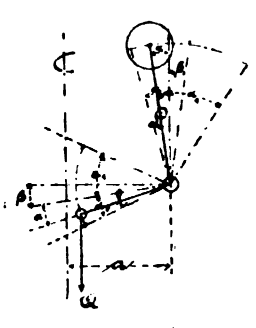
1. On fait souvent usage de ressorts en fil carré ou rectangulaire, les formules de déformation sont différentes, mais la marche à suivre est la même que celle que nous allons exposer, nous supposons donc que les ressorts sont en fil rond.

2. — Brevet Prœll pour un régulateur pseudo-astatique. *Engineering*, 1887, 1er semestre, page 386.

3. *Engineering*. 1882, 2e semestre, p. 206

pivot, on peut négliger toutes les actions autres que celles de la force centrifuge et du ressort.


Fig. 127


Fig. 128

Soit 2Q la compression du ressort pour une position quelconque des bras faisant avec la verticale l'angle α (fig. 128) ; nous aurons en appelant P le poids d'une boule, L la longueur du bras, et l la longueur de la branche de renvoi, en mètres :

$$(1) \qquad \frac{P}{g}\,\omega^2\,(a - L\sin\alpha)\,\frac{L}{l}\cos\alpha = Q\cos(\beta + \alpha)$$

Pour $\alpha = \alpha_0$:

$$(2) \qquad \frac{P}{g}\,\omega_0^2\,(a - L\sin\alpha_0)\,\frac{L}{l}\cos\alpha_0 = Q_0\cos(\beta + \alpha_0)$$

et pour $\alpha = \alpha_1$:

$$(3) \qquad \frac{P}{g}\,\omega_1^2\,(a + L\sin\alpha_1)\,\frac{L}{l}\cos\alpha_1 = Q_1\cos(\alpha_1 - \beta)$$

L'isochronisme parfait exige comme condition nécessaire, mais non suffisante :

$$\omega_0^2 = \omega_1^2$$

or,

$$\beta + \alpha_0 = \alpha_1 - \beta$$

on tire alors des équations (2) et (3) :

$$(4) \qquad \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{(a - L\sin\alpha_0)\cos\alpha_0}{(a + L\sin\alpha_1)\cos\alpha_1}$$

Q_0 étant donné par l'équation (2), par exemple, on voit que Q_1 devra satisfaire à l'équation (4).

Il reste à calculer les éléments du ressort qui, pour des déformations compatibles avec les positions extrêmes du manchon, produira sur celui-ci les réactions $2Q_0$ et $2Q_1$.

Soit $2p$ l'effort nécessaire pour comprimer le ressort de 1 millimètre; la compression initiale, $2Q_0$, exigera une flèche :

$$\frac{2Q_0}{2p} \text{ ou } \frac{Q_0}{p}$$

De même, la compression finale correspond à un raccourcissement

$$\frac{Q_1}{p}$$

on a entre les flèches la relation :

$$\frac{Q_1}{p} - \frac{Q_0}{p} = 1000\, l\, [\sin(\alpha_1 - \beta) + \sin(\alpha_0 + \beta)]$$

et comme $\alpha_1 - \beta = \alpha_0 + \beta = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$,
on peut écrire :

$$2p = \frac{Q_1 - Q_0}{1000\, l \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}$$

On obtient ainsi la quantité $2p$, qui, substituée au premier membre dans la formule (*b*) des ressorts (137), donne :

$$\frac{G\, d^4}{64\, nr^3} = \frac{Q_1 - Q_0}{1000\, l \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}$$

Q_1 et Q_0 sont connus, de même que l et $\alpha_0 + \alpha_1$; on pourrait, d'après cela se donner arbitrairement n et r on déduirait de la formule le diamètre du fil; mais il faut tenir compte de la résistance; celle-ci exige que le ressort puisse, sans que la limite d'élasticité soit depassée, supporter la pression maxima $2Q_1$: la formule (*c*) prend ici la forme :

$$2Q_1 = \frac{\pi}{16}\, \theta\, \frac{d^3}{r}$$

A l'aide des deux dernières équations, on pourra donc déterminer d et n en fonction du rayon r, qui peut être pris arbitrairement.

On peut chercher la vitesse qui correspond à une position intermédiaire du manchon, le milieu de la course, par exemple ; il suffit de résoudre l'équation (1) par rapport à ω^2, en substituant à Q la valeur de la compression exercée pour cette position sur l'une des articulations, soit :

$$\frac{Q_0 + Q_1}{2}$$

En général on trouvera une vitesse différente de ω_0 et ω_1, et qui rendrait l'action du régulateur impossible (voir fig. 114 et 115). Il faudrait agir sur a et sur β de manière à corriger le diagramme, mais à cause des inconvénients de l'isochronisme, on adopte à dessein dans le calcul une valeur ω_1 différente de ω_0 que l'on obtient en fixant d'avance le degré d'isochronisme ε, il faut donc poser :

$$2\,\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1 + \omega_0} = \frac{1}{\varepsilon}$$

On tire de cette équation la valeur de ω_1 à substituer dans l'équation (3), les calculs s'achèvent comme précédemment.

On peut réaliser un régulateur dans lequel $\beta = o$, M. Wilson Hartnell fait remarquer que la position moyenne du manchon s'écarte beaucoup en ce cas de celle qui correspond à la moyenne des vitesses ω_0 et ω_1.

Il est essentiel d'observer que, dans le montage, la compression initiale $2Q_0$ doit être réalisée par un réglage convenable, s'il n'en était pas ainsi, le régulateur oscillerait entre des vitesses différentes de ω_0 et ω_1 et l'isochronisme pourrait être complètement troublé.

139. — *Régulateurs montés sur l'arbre.* — Les masses tournantes sont disposées directement sur l'arbre de la machine, lequel est horizontal, les boules doivent donc être montées de manière à ne donner aucune action de poids, ce qui est facile à obtenir en les reliant de manière à ce qu'elles s'équilibrent dans toutes les positions. Ce régulateur est surtout employé pour produire le réglage en déplaçant directement une poulie excentrique ; cependant, on peut le combiner de manière à

ce qu'il actionne un manchon à gorge glissant sur l'arbre, et utiliser le mouvement de ce manchon à la manière habituelle [1].

Par suite de leur liaison directe avec l'arbre, ces régulateurs ne conviennent qu'aux machines à grande vitesse de rotation ; dans leur application à la commande d'un distributeur, la résistance occasionnée par celui-ci est au nombre des forces qui produisent l'équilibre, aussi, on s'est toujours attaché à la réduire autant que possible en employant des tiroirs équilibrés, il en est ainsi dans la *plupart des machines américaines* [2].

Lorsqu'on ne fait pas usage d'un distributeur à faible résistance, il faut soustraire le régulateur à sa réaction variable en faisant usage d'une commande non réversible [3] qui permet au régulateur d'actionner l'excentrique, et qui est arcbouté contre la commande en sens inverse. La disposition des masses et de leurs bras relativement aux ressorts qui remplacent les bielles des régulateurs à poids, admet un très grand nombre de variétés, on fait usage de ressorts de traction en hélice ou à lames [4], et même de ressorts de torsion concentriques à l'arbre [5]. La théorie de ces régulateurs ne présente aucune difficulté de calcul, toutefois, comme ils sont intimement liés à l'appareil de distribution, leur étude pourrait difficilement trouver place ici.

140. — *Oscillations des régulateurs* [6]. — Nous n'avons envisagé, dans tout ce qui précède, que l'équilibre statique du régulateur ; il est certain qu'il finit toujours par se produire, de même qu'un pendule, sollicité brusquement par une force horizontale, arrive, après un certain nombre d'oscillations, à un équilibre stable. Dans les régulateurs, la question est plus compliquée, attendu que la position du manchon est liée à celle de l'appareil régleur, laquelle réagit à son tour sur la vitesse. Nous essayerons par un exemple, de faire comprendre ce qui se passe en réalité.

Admettons qu'un régulateur du genre Watt présente, lorsqu'on né-

1. Il en est ainsi notamment dans les machines verticales de MM. Weyher et Richemond.

2. Nous citerons la Straight line Engine C°, à Syracuse, Armington et Sims, à Providence, Buckeye, à Salem (Ohio), Westinghouse, à Pittsburgh.

3. Mémoire cité de M. Wilson Hartnell.

4. Machines de Lecouteux et Garnier.

5. Régulateur de Mohn. — *Industrie Moderne*, 1890, p. 263.

6. Résal. — *Traité de Mécanique*.

glige la résistance F au manchon, un diagramme tel que celui de la figure 129.

La machine fonctionnant à pleine charge, le régulateur se tient dans sa position inférieure, la vitesse de régime est ω'''_0, supposons qu'on enlève brusquement la moitié de la charge, il existe une position intermédiaire B, du manchon pour laquelle le travail moteur développé est égal à ce travail résistant; admettons que ce soit précisément la position moyenne, ce qui ne dépend en dernière analyse, que des dispositions adoptées pour relier le manchon à la distribution de la force motrice.

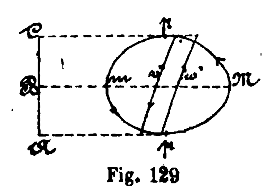


Fig. 129

Au moment où nous supprimons la moitié de la charge, le régulateur commence à s'ouvrir, mais le travail moteur est en excès sur le travail résistant, et la machine s'accélère aussi longtemps qu'il en est ainsi, c'est-à-dire jusqu'au moment où le manchon se trouve en B; d'autre part, le régulateur a reçu de A en B des actions motrices, car son équilibre était rompu depuis le point A, il a donc acquis en B un *maximum* de vitesse ascensionnelle en vertu duquel il dépasse cette position, mais le travail moteur devient alors inférieur au travail résistant et la machine se ralentit, le régulateur s'arrête et redescend ensuite, mais le ralentissement, qui a commencé pour le parcours BC du manchon, continue pendant le parcours CB, puisque le travail moteur est inférieur au travail résistant; le régulateur arrive en B avec un maximum de vitesse acquise, et dépasse cette position; la vitesse de la machine croît à partir du moment où le manchon descend en dessous de B jusqu'à celui où il revient dans cette position.

En résumé, lorsque la charge varie brusquement comme nous l'avons indiqué, le manchon oscille autour de la position B d'équilibre stable, la vitesse possède sa valeur maxima BM, lorsque le manchon est vers le milieu de sa course ascendante, et sa valeur minima B_m, lorsqu'il est au milieu de la course descendante, les valeurs moyennes sont donc réalisées lorsque le manchon est au bas ou au sommet de sa course.

On peut définir ce qui se passe en disant que la vitesse de la machine devance celle indiquée par le régulateur, d'un intervalle de temps égal à celui qui correspond au quart de l'oscillation complète du manchon.

Cet état de choses persisterait indéfiniment jusqu'au moment d'une nouvelle variation de charge, si le mouvement d'oscillation n'était amorti par les résistances passives.

On conçoit qu'il serait bien difficile de traiter le problème d'une manière complète [1], car les forces qui agissent sur le régulateur dépendent, non seulement de sa position, mais de la vitesse variable de la machine, et même, la résistance due au dash-pot varie avec la vitesse de déplacement du régulateur.

1. M. Léauté a résolu cette question.

CHAPITRE IV.

Mesure expérimentale du travail des forces et de la puissance des machines [1].

141. — Il est souvent nécessaire, dans un but d'investigation, de pouvoir mesurer le travail des forces motrices ou résistantes, travail qui ne peut pas toujours être calculé; nous citerons, par exemple, comme se trouvant dans ce cas, celui que développent les moteurs animés, ou ceux qui sont absorbés par certaines transformations technologiques, telles que le travail des métaux, des matières textiles, le broyage et la mouture, etc.

Parfois, on tient à mesurer directement les travaux moteurs et ceux des résistances utiles, afin de déterminer ou de vérifier le rendement des machines en s'appuyant sur une base certaine.

Les instruments que l'on emploie comportent la mesure séparée de l'effort, et du chemin parcouru par son point d'application; dans certains cas, on arrive à totaliser mécaniquement le produit de ces quantités, mais plus souvent on enregistre automatiquement la loi qui relie la force au chemin parcouru.

142. — *Mesure de la force considérée isolément.* — Tous les moyens connus de mesurer la force sont basés sur l'un des trois principes suivants :

1° Équilibre statique de la force à mesurer avec une force extérieure connue, telle qu'un poids. Sur ce principe reposent : la balance à fléaux égaux, le peson ou balance romaine, les bascules à poids variables ou à poids constant. Ces appareils conviennent surtout pour mesurer des poids, mais on s'en sert cependant pour évaluer des efforts horizontaux, comme dans les machines servant à l'essai des matériaux.

1. Les instruments qui font l'objet de ce chapitre constituent en réalité des opérateurs que l'on pourrait appeler *machines à mesurer* le travail, et font partie d'un groupe nombreux dans lequel Rühlmann classe les machines à mesurer, à compter, à calculer, à diviser, etc., nous jugeons utile de les rattacher à l'étude des mécanismes.

2° Équilibre de la force à mesurer avec des forces moléculaires ou élastiques, connues par les déformations qui les accompagnent; ce principe est réalisé dans les balances à ressort ou dynamomètres, qui s'appliquent spécialement à la mesure des forces dont la direction est quelconque; les manomètres constituent une forme particulière de ces appareils convenant pour mesurer la pression des fluides.

3° Mesure de l'accélération d'un mobile sur lequel agit la force à mesurer, les autres forces étant supposées nulles ou connues, ce procédé pourrait être appelé celui de l'équilibre dynamique. Nous en avons rencontré un exemple dans les procédés employés par Coulomb et Morin dans leurs recherches sur le frottement (21).

Ce principe a fait récemment l'objet d'une application nouvelle et des plus ingénieuses (145).

Pour mesurer le travail d'une force isolée, il suffit d'enregistrer, en même temps que la force, le chemin parcouru à chaque instant suivant sa direction, on obtient ainsi une classe d'appareils qu'on appelle aussi *dynamomètres* comme ceux qui servent simplement à mesurer l'effort.

143. — *Mesure de la vitesse considérée isolément.* — Lorsque la vitesse est uniforme, on peut l'obtenir en relevant l'espace parcouru dans un temps donné, mais ce moyen suppose que l'on est certain *a priori* de l'uniformité du mouvement, il ne peut convenir en général que pour donner la vitesse moyenne d'un mouvement peu varié; lorsqu'il s'applique à une pièce tournante, il se simplifie notablement, car il suffit alors de relever le nombre de tours dans un temps donné, soit par l'observation directe, soit au moyen d'un compteur.

Lorsque le mouvement est varié, le procédé le plus général consiste à faire tracer automatiquement par le point la loi des espaces; l'appareil enregistreur doit comporter un tambour dont les déplacements angulaires sont proportionnels au temps, ce qui ne peut être obtenu que par un mouvement d'horlogerie (appareil de Morin pour déterminer la loi de la chute des corps). On obtient la vitesse en menant la tangente à la courbe des espaces, et en mesurant son coefficient angulaire.

La vitesse du mouvement de rotation (uniforme ou varié) peut être obtenue au moyen de tachymètres, basés sur la mesure de la force d'inertie normale, ou force centrifuge, d'un organe dont la vitesse se trouve dans un rapport constant avec celle à mesurer.

Le régulateur à force centrifuge peut évidemment servir de tachy-

mètre, à la condition qu'il n'ait aucune résistance à vaincre ($F = o$), et qu'il ne soit pas isochrone ; à chaque hauteur du manchon, correspond une vitesse que l'on peut déterminer à l'avance.

Le tachymètre de Moscrop est basé sur l'emploi d'un pendule conique ordinaire. Pour que ses indications restent toujours comparables, il faut que l'axe de rotation soit rigoureusement vertical.

Le tachymètre de Buss, construit par Buss, Sombart et Cᵉ, à Magdebourg, qui est très répandu, comporte une disposition dans laquelle les bras du pendule sont ramenés contre l'axe au moyen d'un ressort spiral, l'axe peut par conséquent être orienté comme on le veut dans tous les sens, et on peut même se servir de ce tachymètre à bord des navires sans qu'il soit influencé par les mouvements de roulis ou de tangage.

La vitesse du mouvement rectiligne varié peut aussi être évaluée au moyen de l'accélération, lorsque celle-ci est connue en fonction du temps ; l'intégration permet de trouver la vitesse (145).

Lorsqu'il s'agit d'évaluer des vitesses peu variables d'un instant à l'autre, comme celles des fluides en mouvement, on possède des tachymètres spéciaux tels que les anémomètres, les moulinets ; le loch employé dans la navigation se rattache à cette catégorie d'instruments.

§ I

TRAVAIL PRODUIT PAR UNE FORCE ISOLÉE.

144. — *Dynamomètre de traction de Morin.* L'appareil dont Morin s'est servi dans ses recherches sur le tirage des voitures (fig. 130), comprend un ressort composé de deux lames L, L', l'une est reliée à la résistance, l'autre porte le crochet d'attelage ; lorsqu'on exerce sur celui-ci un effort de traction P, les ressorts prennent une flèche proportionnelle à P ; la somme des flèches est enregistrée à chaque instant sur une bande de papier qui se meut sur les tambours A, B, ceux-ci recevant un déplacement proportionnel à celui de l'effort P. Pour se servir de l'appareil, il faut

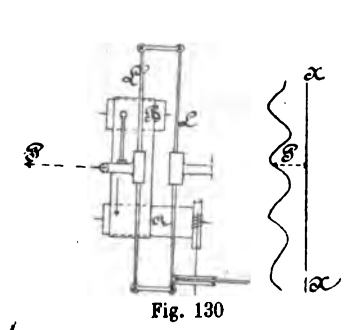


Fig. 130

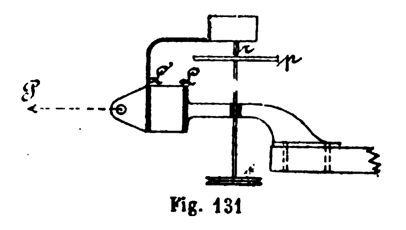
tracer la ligne de repère XX, qui correspond à un effort nul, on l'obtient en actionnant à la main la bande de papier, sans exercer d'effort sur le crochet.

On déduit du diagramme, soit la valeur moyenne de l'effort, soit celle du travail total, soit celle du travail moyen par seconde, ou puissance du moteur ; il suffit de connaître, d'après les données de l'instrument, l'échelle des efforts P et celle des espaces parcourus.

On peut appliquer à cet appareil le totalisateur, qui donne à simple lecture, la valeur

$$\int P\, de$$

pour une traction d'une certaine durée ; ce totalisateur est basé sur l'emploi d'une roulette r, dont le plan, parallèle à la lame L' du ressort (fig. 131), est à une distance invariable de celle-ci ; lorsque l'effort est nul, cette roulette pose au centre du plateau p et ne reçoit aucun mouvement ; le plateau est commandé par la rotation des roues du véhicule ; lorsque l'effort P déplace la résistance, il est clair que la roulette effectue un nombre de tours proportionnel à


Fig. 131

$$\int P\, de$$

145. — *Appareil dynamométrique de M. Desdouits* [1]. — Lorsqu'une ou plusieurs forces agissent sur un système de masses données, maintenues par des liaisons définies (train de chemin de fer par exemple), on peut, par l'étude du mouvement de l'une des masses, arriver à la connaissance des forces qui agissent sur le système.

M. Desdouits a résolu ce problème de la manière la plus élégante ; il a réussi à créer un appareil dont l'emploi pourra probablement être généralisé, et qui est basé sur les considérations suivantes.

1. Note sur un nouvel appareil dynamométrique, applicable à la mesure des efforts moteurs et résistants développés dans la traction des trains, par M. Desdouits, ingénieur des constructions navales. *Revue générale des Chemins de fer*, 1883. *Annales des Ponts et Chaussées*, 6e série, t. XI, pp. 371 à 487.

Dans sa forme la plus simple, un pareil dynamomètre est composé d'un tambour T (fig. 132), recouvert de papier, dont l'axe est dirigé parallèlement au mouvement de translation de la masse, supposée pour le moment unique, sur laquelle agit la force à déterminer ; ce tambour reçoit, d'un mouvement d'horlogerie, une rotation uniforme ; tout l'appareil est installé de niveau dans un fourgon. Au point O est suspendu le pendule O*m*, qui dans l'état de repos ou dans celui de mouvement uniforme, prend la direction verticale. Lorsque le mouvement du point de suspension O est varié et possède une accélération w, le pendule s'incline d'un angle α qui reste invariable tant que l'accélération est constante. La masse m' étant alors soumise à cette accélération en même temps qu'à son poids, il faut qu'on ait :

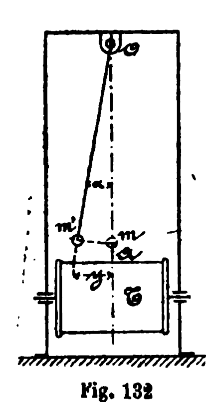


Fig. 132

$$tg\,\alpha = \frac{w}{g}$$

$$w = g\,tg\,\alpha = \frac{g}{\text{OA}}\,y$$

Si on représente par P le poids de la masse, la résultante qui agit sur elle au moment considéré est :

$$\text{F} = \frac{\text{P}}{g}\,w = \frac{\text{P}}{\text{OA}}\,y$$

La courbe relevée sur le tambour fournit donc à chaque instant, à une échelle facile à trouver, la résultante cherchée. Par deux intégrations successives de cette courbe, dont l'équation est

$$w = \frac{dv}{dt} = f(t)$$

On obtient
$$v = \frac{de}{dt} = \varphi\,(t)$$
et
$$e = \psi\,(t)$$

On peut donc utiliser les indications de l'instrument pour mesurer la

vitesse, et pour déterminer l'espace parcouru. On peut en déduire aussi le travail de F en fonction du temps ou en fonction de l'espace, et tracer la loi des variations de la force vive du système. En un mot on peut déterminer les différentes courbes dont il a été question au n° 16, figures 7 et 8.

Dans l'application, l'usage de l'instrument serait limité par sa sensibilité, car on a

$$tg\ \alpha = \frac{w}{g} = \frac{F}{P}$$

Il ne conviendrait donc pas pour mesurer des forces peu importantes; mais dans beaucoup de problèmes, la valeur de F est grande en comparaison de P, il en est souvent ainsi dans les freins continus (28).

La deuxième forme de l'appareil est représentée dans la figure 133;

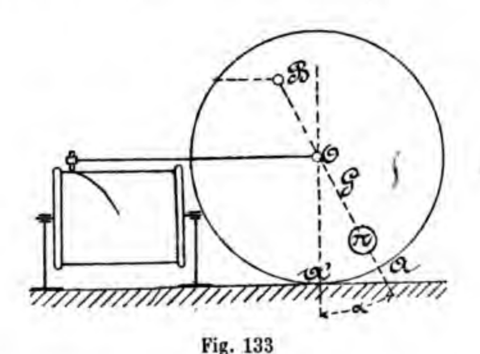


Fig. 133

le pendule est remplacé par un disque circulaire pesant, portant suivant l'un de ses rayons OA une masse additionnelle π, et qui roule sur un plan horizontal appartenant à la masse dont on doit étudier le mouvement. Le disque peut être assimilé à un pendule composé, et si nous supposons que le plan se mouvant de gauche à droite, possède une accélération positive, l'inertie de l'instrument fait que son centre O reste en arrière, jusqu'au moment où le pendule acquiert sa position d'équilibre; il possède alors l'accélération w, et la résultante des forces d'inertie appliquée en G est:

$$\frac{p}{g}\,w$$

p étant le poids du disque et de la masse additionnelle π.

Soit

$$OA = r$$
$$OG = a$$
$$AOA' = \alpha$$
$$AA' = y = r\alpha$$

on a

$$w = \frac{ga \sin \alpha}{r - a \cos \alpha}$$

Si l'angle α est faible, on peut écrire:

$$\frac{w}{y} = \frac{ga}{r(r-a)}$$

qui fait voir qu'on peut mesurer une accélération donnée w, au moyen de y, ces deux quantités étant dans un rapport constant facile à déterminer. De plus, une accélération très faible peut se traduire par un déplacement aussi grand qu'on le veut, il suffit de diminuer a, ce qu'on obtient en rapprochant π du centre de figure du disque.

On voit que par ce système, on peut obtenir une très grande sensibilité, ce que l'inventeur caractérise en disant que le couple moteur augmente en raison du poids du disque, tandis que le couple de rappel diminue autant qu'on le veut. On peut du reste agir encore sur le moment d'inertie du disque, soit en accumulant la masse à son centre, ou au contraire vers la périphérie, et profiter de cette latitude pour le soustraire plus ou moins à son inertie propre, lors de sa mise en position, inertie dont l'effet est de lui faire dépasser l'angle d'équilibre, et de produire des oscillations dans les diagrammes ([1]). Il suffit d'inscrire les déplacements y, du point de contact A, (ou ce qui revient au même ceux du centre O), sur un tambour à l'état de rotation uniforme, pour obtenir la loi

$$w = f(t)$$

et par deux intégrations successives, trouver la vitesse et l'espace parcouru à chaque instant.

On peut aussi inscrire les déplacements d'un point quelconque tel que B, choisi sur le prolongement du rayon AO, attendu qu'ils restent dans un rapport constant, et qui n'altère que l'échelle, avec la quantité y.

1. M. Bertin, ingénieur de la marine française avait déjà utilisé ces propriétés dans ses ingénieux oscillographes destinés à l'étude de la houle et du roulis.

Pour empêcher que le disque ne glisse lors des mouvements brusques du mobile, le dynamomètre, tel qu'il est réalisé, comporte deux secteurs dentés ayant leur centre en O, mis en prise avec deux crémaillères situées dans le plan de roulement.

Lorsqu'on applique ce dynamomètre à l'étude du navire, il donne immédiatement la résultante des forces extérieures qui produisent le mouvement de translation, c'est-à-dire l'effort de propulsion diminué de la résistance au mouvement de la carène, il suffit, pour l'obtenir, de multiplier l'accélération w par la masse entière du navire.

Lorsqu'on le place dans le fourgon d'un train de chemin de fer, il n'en est pas tout à fait ainsi, car les essieux et les roues constituent des systèmes qui subissent non seulement l'accélération du mouvement général de translation, mais encore une accélération due au mouvement de rotation. En d'autres termes, lors de la mise en train, l'accélération du mouvement est diminuée par l'inertie du mouvement de rotation des roues; lors de la suppression de la force motrice, au contraire, les roues font volant, et retardent l'arrêt.

Soit:

M la masse du train,

m la masse des roues concentrées en une seule, r leur rayon,

dm l'élément situé à la distance ρ.

Au moment où l'effort moteur F est exercé sur le train (toutes résistances défalquées), il naît, au contact de la roue unique avec le rail, une réaction f de celui-ci dirigée vers l'arrière, employée à accélérer le mouvement de rotation. Cette force transportée au centre donne lieu à un couple positif fr et à une force f appliquée au centre de la roue, et dirigée vers l'arrière.

On a, du reste, en appelant ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation, et I le moment d'inertie de la roue autour de son axe:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$$

$$fr = \int_0^r \rho^2 \, dm \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

d'où

$$f = \frac{I}{r^2}\frac{dv}{dt}$$

Il reste, pour la force produisant le mouvement de translation:

$$F - f = (M + m\frac{dv}{dt}$$

ou:

$$F = \left(M + m + \frac{I}{r^2}\right)\frac{dv}{dt}$$

Pour déduire, de l'accélération $\frac{dv}{dt}$ fournie par le dynamomètre, la force F agissant sur le train et représentant l'effort de traction diminué de la résistance au roulement, de la résistance de l'air, de l'action éventuelle des freins, etc., on voit qu'il faut multiplier l'accélération par une *fonction des masses*; il est vrai de dire que $\frac{I}{r^2}$ est faible en comparaison de $M + m$.

Dans le cas où les freins agiraient seuls, et où tout effort de traction serait supprimé, $\frac{dv}{dt}$ serait négatif, et F représenterait la somme des résistances.

146. — *Inertia-Instrument* [1]. — Cet appareil, auquel nous conservons le nom que lui a donné son inventeur, M. Williams, de Philadelphie, a été créé pour évaluer expérimentalement la force d'inertie des pièces à mouvement alternatif des machines à vapeur, pièces dont l'accélération atteint, aux points morts, de très grandes valeurs. Il comprend, comme parties essentielles, une masse reliée à la crossette par l'intermédiaire d'un ressort en hélice disposé absolument comme celui des indicateurs (148). L'axe de ce ressort est parallèle à la direction du mouvement, il mesure donc, par ses déformations très petites, la valeur de la force d'inertie de la masse reliée; au moyen d'un système facile à imaginer et qui est imité de celui des indicateurs, on obtient l'inscription des forces d'inertie sur un tambour qui se déplace de la même manière que la crossette.

Il s'agit donc ici d'un dynamomètre du même genre que celui de M. Desdouits, mais dans lequel la force de rappel, au lieu d'être due à un poids, est produite par un ressort.

Nous devons encore signaler, à propos de cette classe intéressante

1. *American Machinist*, 9 août 1884. — Association des Ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand. — *Bulletin Mensuel*, 1884-85, p. 41.

d'instruments, que M. Ernest Solvay a émis l'idée, il y a quelques années, de se servir de l'accélération pour créer un instrument devant servir de stadiomètre, ou même de stadiographe, et qui serait d'une importance très grande pour la navigation par estime. En fait, cet instrument serait réalisé, pour les chemins de fer, par le dynamomètre de M. Desdouits, auquel on adjoindrait deux intégrateurs mécaniques successifs.

§ II.

Travail produit par la pression d'un fluide.

147. — Si on représente par p la pression par unité de surface exercée par le fluide, pression mesurée au moyen d'un manomètre, et par S la surface du piston, le travail correspondant à un déplacement e sera

$$p\,S\,e$$

Lorsque p varie pendant la course du piston, le travail correspondant à un parcours e de cet organe est

$$S\int_o^e p\,d\,e$$

p doit être donné à chaque instant en fonction de e; le manomètre ordinaire ne se prête pas à la lecture d'une pression variable, l'emploi d'un appareil enregistreur est donc tout indiqué.

148. — *Indicateur.* — On donne ce nom à l'instrument qui donne, pour chaque position du piston, la valeur de la pression qui s'exerce à cet instant. L'indicateur a été employé par Watt, sous une forme rudimentaire, probablement dès 1814, puis perfectionné par Mac-Naught, qui en a fait un appareil pratique pour les machines à basse pression et à marche lente. L'indicateur de Mac-Naught comprend un cylindre C

1. Edw. A. Cowper. — *On the Inventions of Watt.* - Engineering, 1883, 2e sem. p. 511, et une intéressante notice de M. Bryan Donkin. — Engineering, 1888, 2e sem. p. 577.

(fig. 134), dans lequel se meut un piston P ajusté par rodage, dont le jeu ne donne lieu à aucune fuite ni aucun frottement, ce cylindre est monté sur la machine en un point tel qu'il communique toujours avec la pression à mesurer, celle-ci s'exerce donc toujours sur le piston de l'indicateur, où elle est équilibrée par un ressort en hélice assez fort pour que ses déformations restent sensiblement proportionnelles aux pressions, dans les limites où l'instrument doit être employé, et assez long pour que les flèches soient suffisantes, et ne donnent pas lieu à des erreurs de lecture trop grandes.

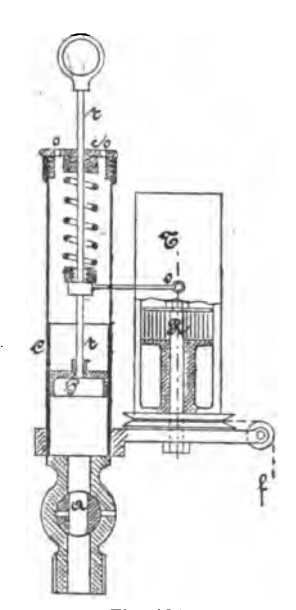


Fig. 134

Le ressort présente deux douilles vissées sur la tige du piston et sur le couvercle *c* de l'indicateur, de sorte qu'il peut agir par extension et mesurer des pressions inférieures à la pression atmosphérique qui s'exerce toujours sur le piston, et qui s'établit par les ouvertures *oo* ménagées dans le couvercle.

La tige *t* porte un crayon *s*, qui suit les déplacements du petit piston en se mouvant suivant les génératrices du tambour T; celui-ci porte une feuille de papier, et reçoit, de la machine à expérimenter, un mouvement alternatif, dont la vitesse, mesurée sur la circonférence, est à chaque instant proportionnelle à celle du piston moteur qui reçoit le travail à mesurer.

Ce déplacement du tambour est obtenu au moyen d'une corde très flexible et non susceptible de s'allonger, que l'on attache en un point convenablement choisi; elle n'agit que par extension, le mouvement de retour du piston est produit par un ressort en spirale R placé dans un barillet au centre du tambour, et dont la raideur est suffisante pour maintenir tendue la ficelle *f* qui lui communique le mouvement.

Le diagramme tracé représente, en ordonnées, l'excès de la pression à mesurer sur la pression atmosphérique, excès qui peut être positif ou négatif; il est nécessaire de relever au préalable l'axe à partir duquel cet excès est mesuré, il est obtenu en faisant agir la pression atmosphérique sur la face inférieure du piston de l'indicateur, au moyen du robinet à deux voies A, le crayon laisse sur le papier une ligne perpen-

diculaire aux génératrices du cylindre. Après une course double du piston, la pression du fluide reprend généralement la même valeur ([1]), il en

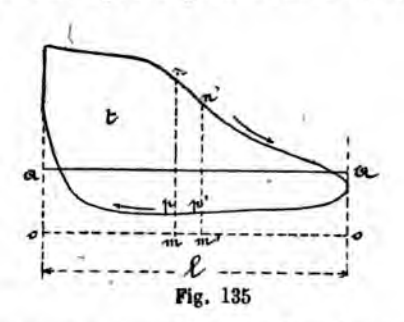


Fig. 135

résulte que le diagramme est une courbe fermée qui présente la forme de la figure 135, et qui est coupée par la ligne atmosphérique.

149. — Connaissant l'échelle qui doit servir à mesurer les ordonnées, la surface S du piston de la machine, et sa course L, on peut évaluer le travail développé pour le parcours complet du piston, sur une de ses faces.

Considérons à cet effet, une machine dont le piston aurait l'unité de surface, et une course égale à la longueur du diagramme : menons, parallèlement à la ligne atmosphérique, la ligne *oo*, distante de la précédente de 1 atmosphère; les ordonnées telles que *mn*, *mp*, représentent les pressions absolues qui s'exercent sur le piston à l'aller et au retour, le travail développé par le parcours du piston, à l'aller, est représenté par la surface

$$m\ n\ n'\ m'$$

le travail résistant absorbé au retour pour le chemin *m'm* est représenté par

$$m\ p\ p'\ m'$$

La différence de ces deux travaux est donnée par

$$n\ n'\ p'\ p$$

Pour la course entière d'aller et retour, le travail développé sera donc mesuré par la surface fermée *t* du diagramme.

1. Dans les moteurs à gaz les plus répandus, l'évolution complète du fluide comprend quatre courses.

Le travail de la machine réelle ne diffère de celui de la machine considérée que par la surface S fois plus grande du piston, et la longueur $\frac{L}{l}$ fois plus grande de la course, le travail cherché sera

$$S \frac{L}{l} t$$

Or, $\frac{t}{l}$ représente l'ordonnée moyenne du diagramme, indépendante de l'amplitude du mouvement du point choisi pour commander le tambour; si on appelle p_m cette ordonnée moyenne, mesurée à l'échelle des pressions, le travail, pour la période considérée, a pour valeur

$$SLp_m$$

Le calcul de p_m peut être fait au moyen du planimètre, qui donne immédiatement, après division de la surface t par la base, l'ordonnée moyenne en millimètres; l'échelle relative au ressort employé permet d'évaluer la pression correspondante en kilogrammes par centimètre carré, il suffit d'exprimer S en centimètres carrés et L en mètres pour obtenir le travail SLp_m en kilogrammètres.

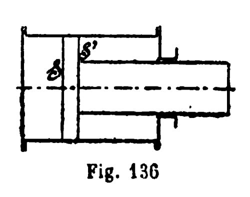


Fig. 136

La puissance développée sur un piston résulte des travaux développés sur ses deux faces; pour la calculer, il est nécessaire de relever le diagramme des pressions sur la deuxième face, dont la section S' peut être différente de la première (fig. 136). Soit p'_m la pression moyenne de ce diagramme.

Si le mouvement alternatif du piston est lié à un arbre qui effectue n révolutions par minute, la puissance développée sur les deux faces du piston, évaluée en chevaux, devient :

$$N = \frac{nL\,(Sp_m + S'p'_m)}{60 \times 75}$$

dans le cas où $S = S'$, on a :

$$N = \frac{2LnS}{60 \times 75} \frac{p_m + p'_m}{2}$$

Le facteur $\frac{2LS}{60 \times 75}$ caractérise les dimensions de la machine, il suffit,

à chaque expérience, d'évaluer n ainsi que les pressions moyennes des deux diagrammes. — Il est évident que la pression atmosphérique, qui s'exerce ***sur la section de la tige***, occasionne, pendant la course directe, un travail résistant; toutefois, ce travail est restitué pendant la course rétrograde, et n'intervient pas dans le calcul.

Lorsque le régime de la machine varie, tant sous le rapport du travail qu'elle développe que sous le rapport de la vitesse, on se propose presque toujours de rechercher la puissance moyenne développée pendant un temps assez long, ou encore de totaliser le travail effectué pendant un certain nombre d'heures; il faut alors, par des observations de vitesse et par des diagrammes suffisamment nombreux, calculer la puissance développée à des intervalles rapprochés, si N est la puissance à l'instant t, on voit que la puissance moyenne développée pour une période de durée T sera :

$$N_m = \frac{1}{T}\int_o^T N\,dt$$

lorsque les diagrammes sont pris à intervalles régulieurs $\frac{T}{K}$, on obtient

$$N_m = \left(\frac{\frac{N_o + N_k}{2} + N_1 + \ldots\ldots + N_{k-1}}{K}\right) T$$

Il ne faut pas confondre l'expression comprise dans la parenthèse, et qui représente l'ordonnée moyenne de l'intégrale, avec celle que l'on obtiendrait en calculant la moyenne arithmétique des ordonnées, et qui conduirait à un résultat inexact.

Le calcul ci-dessus suppose que la fonction N est ***continue*** ; lorsque le travail d'un moteur varie brusquement, suivant une loi indéterminée, il est impossible d'obtenir une mesure sérieuse de la puissance par ce procédé ; c'est pourquoi, dans les expériences de précision, il est nécessaire d'opérer sous une charge aussi ***constante*** que possible.

150. — ***Planimètre servant à trouver directement l'ordonnée moyenne*** [1]. — On peut réaliser un planimètre d'Amsler à directrice rec-

1. Cet instrument est signalé dans le catalogue de la Straight line Engine, de Syracuse, sous le nom de *Coffin's Averaging Instrument*.

tiligne (fig. 137), le diagramme étant placé comme l'indique la figure, c'est-à-dire ayant la ligne atmosphérique perpendiculaire à la directrice, et la première ordonnée suivant son prolongement, on fait le tour de la figure en partant du point A et dans le sens de la flèche, lorsque le stylet

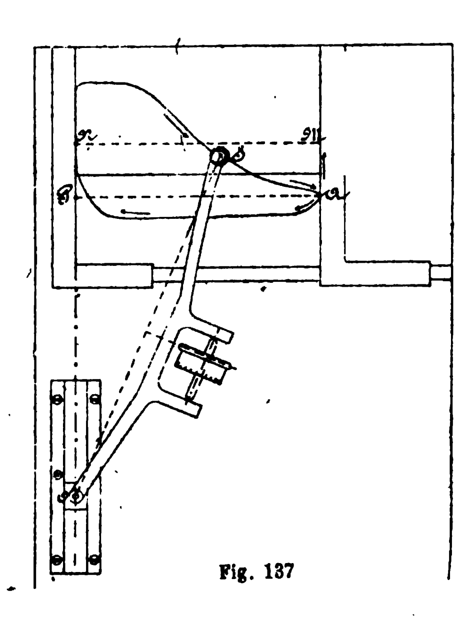


Fig. 137

est revenu au point de départ, on effectue un parcours additionnel AM, que l'on arrête lorsqu'on retrouve sur le compteur le chiffre du point de départ, AM est l'ordonnée moyenne.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que le parcours MN, NP, PA, n'altère pas la position de la roulette, attendu que les deux parcours MN et PA entraînent des rotations égales et opposées, et que le parcours NP laisse la roulette immobile, etc.

151. — *Observations.* — 1° La pression moyenne au diagramme peut être trouvée sans le secours du planimètre, les indicateurs Richards sont souvent pourvus d'un appareil articulé, qui sert à tracer à travers le diagramme, perpendiculairement à la ligne atmosphérique, 11 ordonnées séparées par 10 intervalles égaux, on a alors (fig. 138).

$$p_m = \frac{p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{10}}{10}$$

2° Nous avons pris comme exemple, le cas d'une machine motrice, puisque nous avons supposé que la pression s'exerçant sur le piston

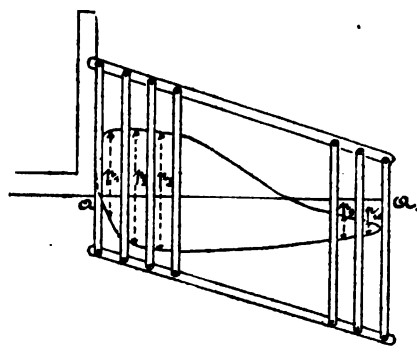


Fig. 138

pendant la course directe est plus grande que la contrepression pendant la course rétrograde.

Le même diagramme deviendrait celui d'une machine absorbant du travail s'il était tracé en sens inverse, c'est-à-dire si la branche inférieure de la courbe correspondait à la marche directe.

152. — *Indicateur Richards.* — L'indicateur de Mac-Naught, ou celui du même type, connu dans la marine française sous le nom d'indicateur Garnier, ne convient pas pour les grandes vitesses de rotation, car la

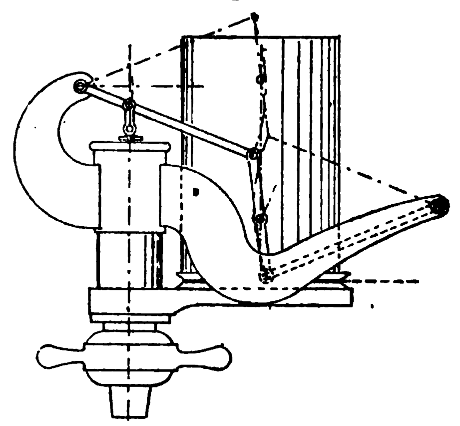


Fig. 139

compression du ressort doit être égale à la hauteur du diagramme, le piston de l'indicateur et sa tige doivent recevoir une course égale à cette hau-

teur; dans ces conditions, les ordonnées du diagramme sont influencées par les forces d'inertie des parties mobiles de l'indicateur, forces qui se traduisent par des ondulations de la courbe; on peut concevoir l'indicateur Richards comme dérivé de l'appareil précédent et dans lequel on aurait divisé le ressort en quatres parties égales pour n'en conserver qu'une; les flèches sont ainsi rendues quatre fois plus petites, elles sont ensuite amplifiées dans le rapport de 1 à 4 au moyen d'un mécanisme à fléaux extrêmement léger (fig. 139); les ressorts devenant très courts, on peut obtenir des déformations convenables en augmentant à la fois leur raideur et leur longueur, il en résulte que ces déformations restent plus exactement proportionnelles aux pressions.

153. — L'appareil Richards a été, pendant un assez grand nombre d'années, l'indicateur par excellence; son emploi tend déjà plus ou moins à disparaître; l'inertie des pièces y est trop considérable encore pour les

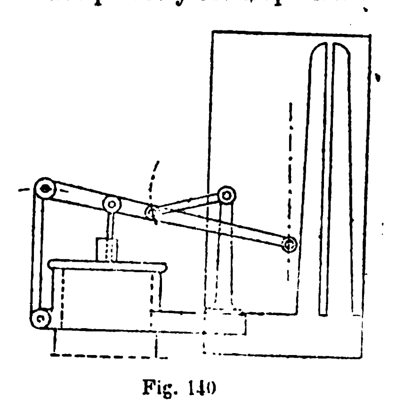


Fig. 140

grands nombres de tours; les indicateurs Thompson (fig. 140), Crosby [1], Tabor [2], Martin [3], par la légèreté des pièces mouvantes et la réduction de la course pour une hauteur donnée de diagramme, permettent de relever des courbes qui ne présentent pas trop d'ondulations, même à des vitesses dépassant 300 révolutions par minute. Dans l'indicateur Crosby, le barillet a reçu des perfectionnements qui en rendent la commande très douce, et exempte de soubresauts [4].

Diverses tentatives ont été faites pour réaliser des indicateurs sans

1. Engineering, 1884, 1er sem., p. 185.
2. Engineering, 1889, 1er sem , p. 653.
3. Bienaymé. — *Machines Marines*, p. 149.
4. *Compte-rendu des séances du 9e Congrès*, etc. — Paris, Capiomont, 1886. — Note de M. Walther-Meunier.

pistons, la pression s'exerçant sur un diaphragme flexible analogue à celui du manomètre Schaeffer et Budenberg, ou dans un tube à section elliptique [1]. L'emploi de ces instruments ne s'est pas généralisé, ils peuvent rendre des services dans des cas spéciaux [2]. M. Marcel Deprez avait indiqué [3] un moyen de supprimer le barillet et les saccades qui se produisent à grande vitesse, en se servant d'un système basé sur le pantographe.

Enfin, nous devons encore citer, à titre de curiosité, un procédé ingénieux imaginé par Hirn pour mettre le diagramme absolument à l'abri des forces d'inertie; il consiste à limiter, par un système de deux buttoirs, espacés d'une quantité constante, la course du piston de l'instrument; le système de deux buttoirs est déplacé à chaque relevé, on obtient ainsi, sur la même feuille, une série de diagrammes partiels (fig. 141), qui, par leur réunion, dessinent la loi réelle des pressions; le mouvement dans le sens vertical étant très faible à chaque tracé, il en résulte que les pressions enregistrées par les éléments *ab*, *cd*, *ef*, etc., sont bien affranchies des forces d'inertie. M. Paul Garnier, à Paris, construit un indicateur dans lequel le principe ci-dessus est réalisé d'une manière pratique. Pour que le procédé de Hirn soit applicable, il faut que la loi des pressions reste la même pendant toute la durée du relevé.

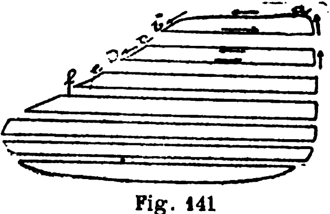


Fig. 141

154. — *Indicateurs pour travaux très variables.* — Dans les machines d'extraction des mines, le travail varie d'un tour à l'autre; on peut alors recueillir, au moyen de l'indicateur de M. Guinotte, les diagrammes d'un grand nombre de tours successifs, en évitant la confusion qui résulterait de leur superposition partielle; le mouvement du tambour, tout en étant proportionnel au déplacement du piston, a toujours lieu dans le même sens, grâce à un mécanisme d'enclanchement spécial; on obtient alors par un trait continu *abc*......(fig. 142), la loi de variation de cette pression.

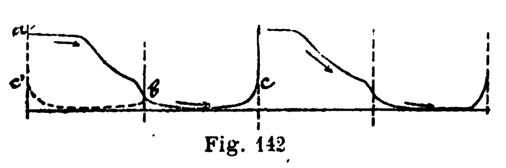


Fig. 142

1. *Kenyon's Pistonless Indicator*. - - Engineering, 1880, 1er sem., p. 323.
2. Indicateur pour faibles pressions, par A. Stévart, *Revue universelle des Mines*, 2e série, T. I, 455.
3. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 188).

Dans un ordre d'idées analogue, on a produit des indicateurs où le tambour se relève, à chaque tour, d'une quantité constante et connue, (Schaeffer et Budenberg), et l'indicateur Richardson, où les diagrammes sont obtenus détachés l'un de l'autre avec une certaine déformation, etc.

155. — Nous devons signaler encore l'indicateur Prussman (fig. 143), qui donne à chaque instant, à partir de la ligne atmosphérique, la diffé-

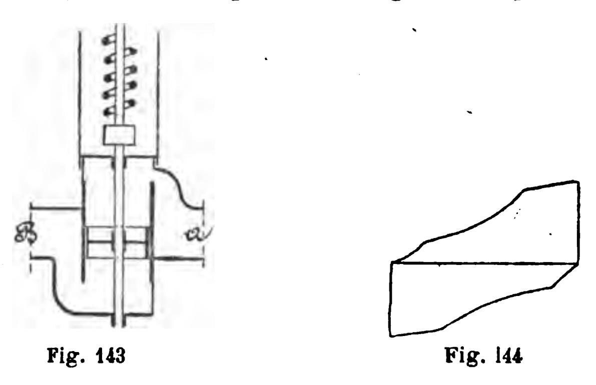


Fig. 143 Fig. 144

rence des pressions sur les deux faces du piston, il suffit à cette fin, de faire communiquer les tubulures A et B avec les deux extrémités du cylindre, les diagrammes obtenus sont représentés figure 144. Cet indicateur peut aussi, par une manœuvre convenable des robinets, donner des diagrammes ordinaires.

156. — *Sur l'approximation obtenue au moyen des indicateurs et les précautions à prendre dans leur emploi.* — L'indicateur est devenu un instrument de recherche de premier ordre, grâce à l'expérience que les ingénieurs en ont acquise, aux soins avec lesquels il est construit, et aux travaux de plusieurs savants qui l'ont étudié d'une manière complète [1]. Des expériences précises, dans lesquelles on dispose de moyens de vérification, ont démontré que l'approximation des indicateurs peut atteindre 1 %. Toutefois, l'attention doit être sérieusement attirée sur les points suivants :

1° Pour chaque système d'appareils, il existe une vitesse à laquelle les ondulations commencent à se montrer dans les diagrammes, et cette

1. Recherches du professeur Berndt, de Chemnitz, Engineering, 1877, 2e sem., p. 383. — 1878, 1er sem., pp. 77 et 295 ; de M. L. de Maupeou en France, *Minutes of proceedings of the Institution of Civil Engineers*, V. LXXII, p. 386 ; du professeur Osborne Reynolds, en Angleterre, même recueil, V. LXXXIII, pp. 1 à 105.

vitesse peut être d'autant plus élevée que les ressorts sont plus raides; ainsi, pour le Richards, d'après le mémoire de M. Osborne Reynolds, le ressort produisant des ordonnées de 1 pouce pour la pression de 20 livres par pouce carré, donne des ondulations lorsque le nombre de tours est de 69 par minute, la vitesse croît pour des ressorts plus raides suivant le tableau ci-dessous

NOMBRE DE LIVRES PAR POUCE CARRÉ DANS UN POUCE D'ORDONNÉE	VITESSE POUR LAQUELLE COMMENCENT LES ONDULATIONS
20	69
40	99
60	120
80	139
100	155

Les ondulations proviennent des effets de l'inertie lors de la brusque mise en charge du ressort, leur durée est à peu près constante, et leur amplitude décroît; elles n'affectent pas beaucoup la surface du diagramme, mais elles peuvent le déformer considérablement; on les réduit en diminuant la masse des organes rattachés au piston, sous ce rapport, les appareils Crosby, Thompson, etc., présentent une grande supériorité.

2° Les ressorts doivent toujours être essayés au moyen de charges directes, appliquées soit à l'aide de poids, soit au moyen d'un manomètre à air libre, les déformations sont mesurées dans toute l'étendue des pressions; pour cette opération, le ressort est placé dans l'indicateur, il doit être maintenu à la température de 100° au moins, par une circulation de vapeur, de manière à être mis dans les conditions pratiques de son emploi. Les déformations à chaud sont supérieures aux déformations à froid, et l'erreur de ce chef atteint 1 ou 2 %. Les ressorts qui présentent des déformations en désaccord avec les échelles doivent être rejetés.

3° Le crayon doit être appuyé très légèrement sur le tambour, principalement quand on opère sur de basses pressions, donc avec des ressorts faibles.

4° Les communications entre le cylindre et l'indicateur doivent être aussi courtes et aussi directes que possible, ne présenter ni coudes ni étranglements, et être bien préservées contre les refroidissements.

5° Les ficelles employées doivent être très résistantes et inextensibles, il faut au préalable les charger de poids, afin de supprimer leur allongement ultérieur ; elles doivent être aussi courtes que possible ; l'axe du tambour doit être bien graissé ; pour les grandes vitesses, il faut préférer les dispositions de ressorts de rappel qui ont pour objet d'uniformer la tension de la ficelle, afin de rendre son allongement constant, ce qu est réalisé dans le Crosby [1].

6° Le tambour de l'indicateur peut être commandé par un réducteur de course à tambour différentiel, ou par un système de leviers rigides rattachés à la crosse du piston, ce dernier moyen est seul applicable pour les grands nombres de tours. — Il est impossible de prévoir en détail toutes les combinaisons qui peuvent être employées, mais il ne faut pas perdre de vue que les déplacements du tambour doivent rester rigoureusement proportionnels à ceux du piston, beaucoup de dispositions souvent admises ne satisfont pas à cette condition et donnent des diagrammes déformés.

7° L'habileté et l'expérience de l'opérateur ont naturellement une grande influence sur la précision des résultats, et lui suggèrent une foule de soins qu'il serait inutile d'indiquer.

8° Avant l'emploi, le piston et toutes les articulations doivent être graissés, après l'emploi, toutes les parties doivent être minutieusement essuyées, il faut éviter que la rouille, en attaquant les ressorts, n'altère leurs déformations.

§ III.

Travail moteur disponible sur un arbre.

157. — *Frein de Prony.* — Lors d'une expertise sur la machine à vapeur du Gros-Caillou, Prony eut l'idée de mesurer la puissance déve-

1. Mair, pp. 50-55. — Wingfield, pp. 74-78. — *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, LXXX.

loppée en l'absorbant par une résistance facile à évaluer, et créa un frein dynamométrique, souvent employé aujourd'hui encore sous sa forme primitive.

Il comprend (fig. 145), une poulie de rayon R, calée sur l'arbre auquel

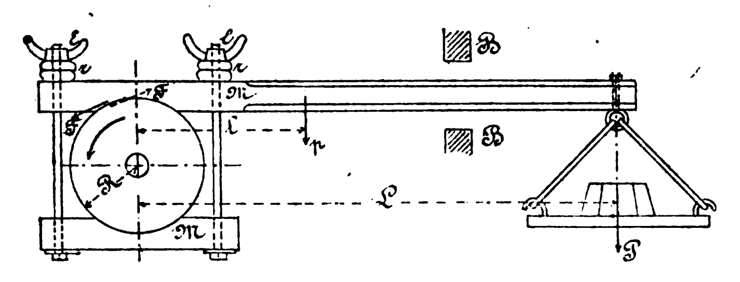


Fig. 145

le moteur communique la puissance à mesurer, et deux mâchoires M, M, en bois dur, serrées au moyen des écrous E; les ressorts *r*, *r*, permettent d'obtenir un serrage modéré; le sabot supérieur est prolongé par un levier, à l'extrémité duquel se trouve un plateau; des buttoirs B, B, permettent de limiter la course du levier dans les deux sens.

On met la machine dans les conditions de fonctionnement pour lesquelles elle développe le travail à mesurer, tout en serrant les mâchoires du frein, de manière à maintenir la vitesse du régime de n tours par minute; on équilibre le frein au moyen de poids placés sur le plateau.

Dans ces conditions, si l'on néglige le frottement sur l'arbre, et si l'on appelle F, F'.... les frottements développés entre les sabots et la poulie, on aura pour la puissance en chevaux, absorbée par ces frottements, laquelle représente aussi la puissance de la machine :

$$N = \frac{2\pi \, Rn \, \Sigma F}{60 \times 75}$$

D'autre part, soit p le poids du frein (y compris la plateau vide), agissant à la distance l du centre de l'arbre, et P le poids ajouté sur le plateau à la distance L, on aura, lorsque le frein est équilibré :

$$R \, \Sigma F = PL + pl$$

d'où, par substitution :

$$N = \frac{2\pi n \, (PL + pl)}{60 \times 75}$$

Le produit *pl* se détermine expérimentalement par le procédé indiqué (fig. 146), on obtient ainsi le poids *p*' tel que

$$p'L = pl$$

d'où

$$N = \frac{2\pi n L (P + p')}{60 \times 75}$$

Les mâchoires tendent à s'échauffer par le travail du frottement, il est nécessaire de les arroser au moyen d'eau savonnée, qui a pour effet de donner à ce coefficient de frottement une valeur plus régulière ; malgré

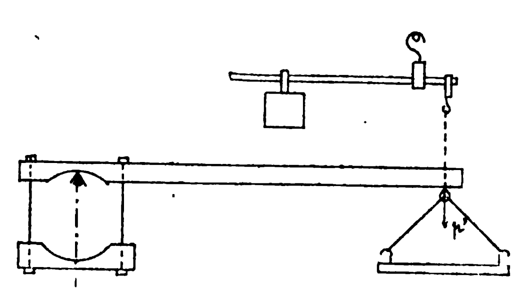


Fig. 146

cette précaution, il faut constamment régler le serrage afin de maintenir la vitesse de régime, et d'empêcher le levier de donner contre ses buttoirs.

Au point de vue de l'échauffement, il faut donner à la poulie une surface proportionnelle au travail à absorber par seconde, car la chaleur s'écoule par conductibilité à travers la jante ; même si le refroidissement est obtenu par l'arrosage à l'eau froide, la quantité de chaleur enlevée par seconde est encore proportionnelle à cette surface, ou au produit de la largeur par le diamètre.

Pour que le bois se comporte bien au point de vue du frottement, il faut que la pression normale qu'il supporte par unité de surface soit à peu près constante en passant d'un appareil à l'autre, le frottement par unité de surface doit donc l'être aussi ; si on appelle S la surface frottante, et v la vitesse au contact, le travail absorbé sera KSv, K étant un coefficient constant.

On aura donc:

$$S = \frac{N}{Kv}$$

c'est-à-dire que la surface de contact peut varier en raison inverse de la vitesse, tandis que, d'après la première condition, elle serait simplement proportionnelle à la puissance.

158. — En comparant les freins employés dans diverses circonstances, on peut poser la formule :

$$LD = 0{,}004\ N$$

L est la largeur et D le diamètre de la poulie en mètres, N la puissance en chevaux; il faut, pour que cette formule soit applicable, que la vitesse à la circonférence soit au moins de 6 mètres par seconde, si la vitesse v était inférieure à ce chiffre, il faudrait multiplier le produit ci-dessus par

$$\frac{6}{v}$$

Exemple :

$$N = 50 \text{ chevaux}$$
$$n = 130 \text{ tours par minute}$$

On trouve :

$$LD = 0.20$$

on pourra adopter :

$$D = 1^{m}000$$
$$L = 0^{m}200$$

attendu que

$$v = \frac{\pi \times 130}{60} = 6^{m}80$$

Pour $n = 80$ tours par minute, on a:

$$v = 4^{m}.20$$

on prendra donc

$$LD = \frac{0.20 \times 6}{4.2} = 0.285$$

d'où, pour

$$D = 1^m000$$
$$L = 0^m285$$

On peut employer des freins de moindre surface, mais on éprouve plus de difficultés à obtenir un fonctionnement régulier.

159. — *Perfectionnements apportés au frein de Prony.* — On peut rendre le serrage plus facile à régler en disposant les mâchoires comme l'a indiqué Poncelet (fig. 147), on profite ainsi du ressort des pièces de bois, l'écrou E devient aussi plus accessible, mais ce système ne convient que pour de petites poulies.

Dans la forme ordinaire, l'équilibre est affecté par la position du levier;

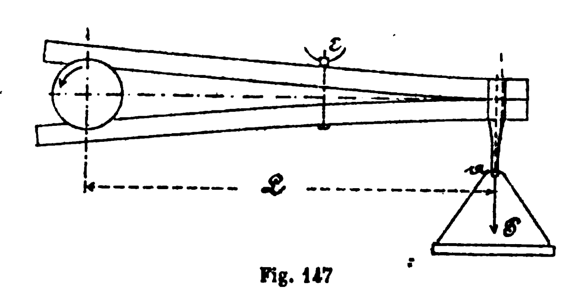


Fig. 147

lorsqu'il s'élève, le bras L diminue; il en résulte une certaine instabilité, que l'on peut combattre en reportant le point d'attache A, du plateau, en-dessous de l'horizontale passant par le centre de l'arbre. Lorsque le frein tend à s'enlever, le moment du poids augmente et l'équilibre se rétablit automatiquement, de même, quand il tend à descendre, le bras de levier de l'effort diminue, et l'équilibre se rétablit encore.

Il est vrai que les indications sont alors entachées d'une légère erreur; au point de vue de la rigueur des résultats, il vaut mieux employer un dispositif analogue à celui qui a été introduit par M. Walther Meunier dans le frein de MM. Weyher et Richemond (fig. 148).

Ce dernier appareil [1] est caractérisé surtout par une disposition excellente qui supprime l'arrosage, et qui consiste à employer une poulie

1. Note de M. Walther-Meunier présentée au 4e Congrès tenu en 1879 à Rouen, par les Ingénieurs en chef des Associations pour la surveillance des chaudières à vapeur.

creuse à circulation d'eau intérieure (fig. 149); l'eau arrive d'un réservoir par le tuyau *a*, pénètre entre les joues *j*, *j*, et s'écoule par un ajutage concentrique à la tubulure d'arrivée au point *b*. Les sabots sont enduits de graisse.

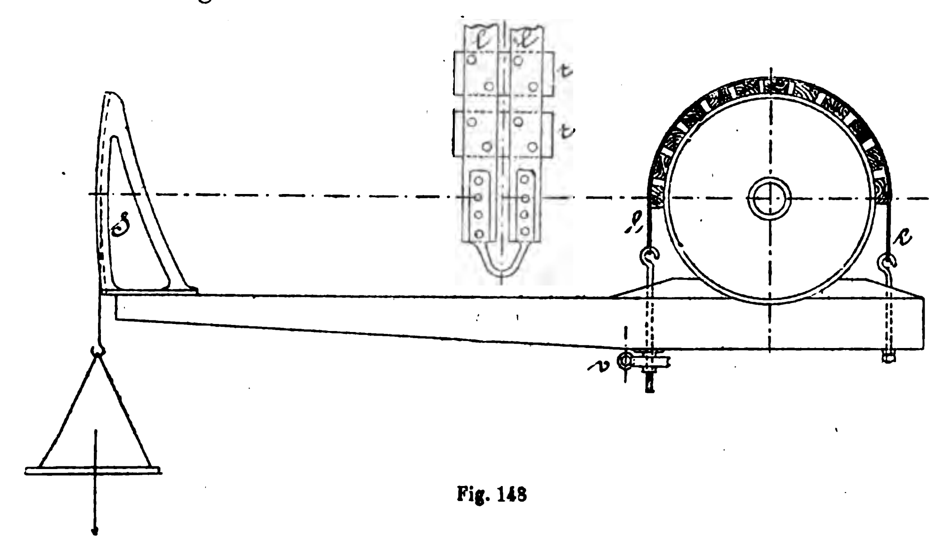


Fig. 148

Ce frein peut être proportionné d'après les formules établies au n° 158. On remarquera que les sabots rigides sont remplacés par des taquets *t*, montés sur une lame flexible *l*, sur laquelle on agit pour régler le serrage au moyen d'une vis tangente *v*, manœuvrée par un volant latéral; il est du reste presqu'impossible de conserver le sabot unique lorsque le diamètre devient grand.

Malgré l'emploi du secteur S, le poids *p*, du frein seul, étant appliqué au centre de gravité, est encore de nature à troubler l'équilibre lorsqu'il se produit des oscillations; on pourrait corriger tout à fait ce défaut, par l'addition d'un contrepoids capable d'amener le centre de gravité au centre de l'arbre.

Fig. 149

D'ailleurs, ces diverses formes ont l'inconvénient de reporter sur l'arbre le poids propre du frein, ainsi que la

charge additionnelle ajoutée dans le plateau, il en résulte que le frottement de l'arbre sur ses coussinets est augmenté d'une manière anormale pendant l'expérience.

160. — Pour analyser la répartition des forces dans le frein de Prony, admettons qu'il soit constitué de telle manière que chacun des sabots ne touche la poulie qu'en un seul point A, B (fig. 150), et que les tringles

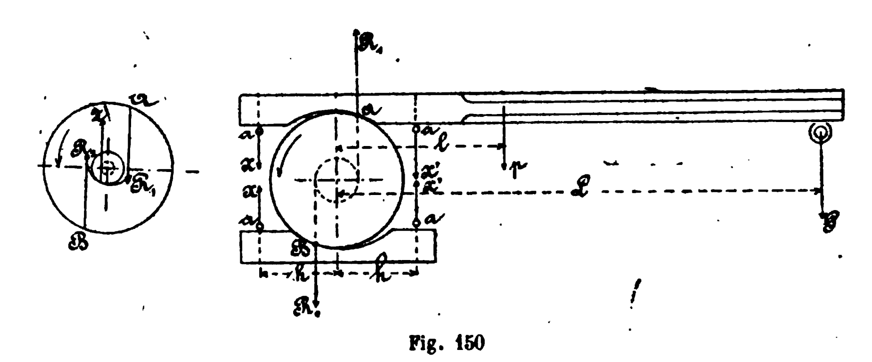


Fig. 150

qui réunissent les deux mâchoires soient articulées à leurs extrémités *a*, de manière que les tensions qui s'y développent ne puissent prendre que les directions *aa*; les réactions de la poulie sur les sabots passent à une distance du centre donnée par $r \sin \varphi$, r étant le rayon de la poulie et φ étant l'angle du frottement; de plus, elles ne peuvent être que verticales, étant donnée l'hypothèse faite sur les tringles. Si p représente le poids de l'appareil en y comprenant le sabot inférieur, R_1 et R_2 les réactions, on aura

$$PL + pl = (R_1 + R_2)\, r \sin \varphi \qquad (1)$$
$$R_1 - R_2 = P + p \qquad (2)$$

Ces équations permettent de déterminer R_1 et R_2.

On a du reste, en appelant X, X', les tensions dans les tringles, et p_2 le poids du sabot inférieur :

$$(3) \qquad \begin{aligned} X + X' &= R_2 + p_2 \\ (X - X')\, h &= R_2\, r \sin \varphi \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations donnent X et X' et font voir que

$$X > X'$$

Il vaut donc mieux dans le dispositif de la figure 150 réaliser le serrage en agissant sur le boulon placé entre l'arbre et la charge.

En isolant la poulie, on voit que son arbre est soumis, d'une part, au couple moteur, et d'autre part au moment des forces R_1, R_2, et de la réaction $Z = R_1 - R_2$ qui agit sur les tourillons, ceux-ci étant supposés à égale distance du plan moyen de la poulie. On a, du reste, à cause de l'équation (2) :

$$Z = P + p$$

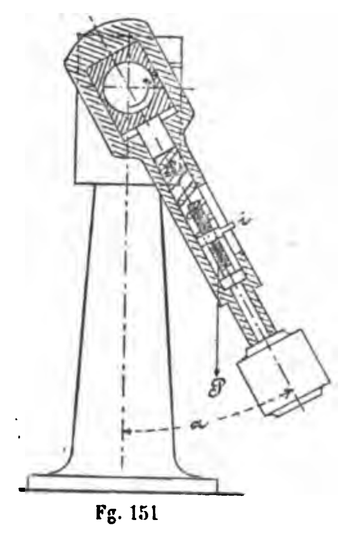
La puissance absorbée par Z est, dans le mouvement de rotation ;

$$\frac{2\pi n\,(P + p) f \rho}{60 \times 75 \sqrt{1 + f^2}}$$

f est le coefficient de frottement des tourillons sur leurs coussinets, ρ leur rayon, n le nombre de tours par minute. Ce travail devrait être ajouté à celui de la formule ordinaire. Dans le cas où la poulie est montée en porte-à-faux (frein Weyher et Richemond) le travail du frottement est encore augmenté.

161. — *Freins équilibrés.* — L'incertitude qui règne sur la valeur de f doit faire recourir, pour les expériences de grande précision, aux freins équilibrés, dans lesquels la réaction verticale sur l'arbre est complètement annulée, et dont il est facile d'imaginer les dispositions [1].

162. — *Machine de Thurston pour l'essai des lubrifiants.* — Cette machine étant en réalité un frein dynamométrique, il y a lieu de l'examiner ici ; nous y avons fait allusion au n° 29 : on répand la matière à essayer sur un tourillon en porte-à-faux (fig. 151): une tête de bielle à deux coussinets est engagée sur le tourillon et est lestée à son extrémité de manière à former un pendule de poids P. Les coussinets sont pressés



Fg. 151

1. Frein équilibré de M. Minary, 13e Congrès des Ingénieurs en chef, etc., tenu à Lyon.

contre le tourillon par un ressort R, logé dans le pendule, et dont la tension, que l'on peut régler, est connue par la position de l'index *i*.

Lorsque le tourillon tourne dans le sens de la flèche, le pendule dévie comme l'indique la figure ; son moment par rapport à l'axe du tourillon, proportionnel au sinus de l'angle α, permet de déterminer le moment résultant des frottements ; le pendule se meut du reste le long d'un secteur qui porte une graduation faite d'après le sinus de l'angle, le poids P étant connu, on obtient les résultats à simple lecture.

Ainsi que dans le frein de Prony, le moment agissant sur le pendule est produit par des forces tangentielles dont on ignore le mode de répartition, les forces normales sont également inconnues, cette machine ne peut donc servir, pas plus que le frein de Prony, à la détermination des coefficients de frottement.

163. — *Freins à serrage automatique.* — Les variations du frottement obligent, dans le frein de Prony, à régler à la main le serrage des mâchoires ; on a imaginé des dispositions dans lesquelles cette opération est produite automatiquement, il en est ainsi notamment dans les freins Appold, Marcel Deprez, etc.

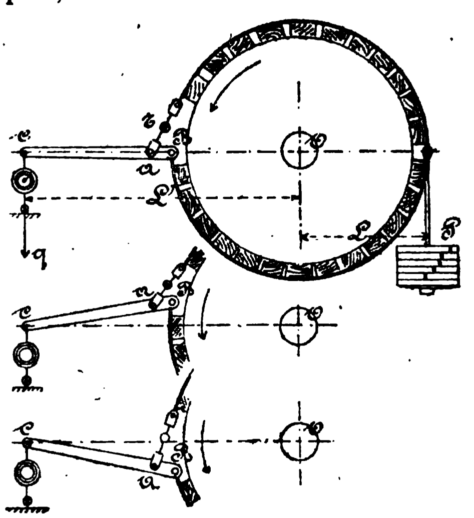


Fig. 152-153-154

Le frein Appold (fig. 152) comporte une bande flexible garnie de taquets et serrée au moyen d'un tendeur T ; la bande est rattachée, par

ses deux extrémités A, B, à un levier dont l'extrémité C fonctionne à peu près comme point fixe ; toutefois, la réaction exercée en ce point sur le levier est mesurée par un dynamomètre. La charge qui équilibre la plus grande partie de la résistance agit en P à la circonférence de la bande.

Lorsque le coefficient de frottement venant à diminuer, le poids P tend à descendre, la position du levier devient celle de la figure 153 et la bande se resserre ; au contraire si le frein vient à être entraîné, le frein se desserre ainsi que le montre la figure 154. C'est donc l'élément AB, qui, par son obliquité plus ou moins grande, fait varier la tension de la bande.

En appliquant à cet appareil le même raisonnement qu'au frein de Prony, et en supposant d'abord que le centre de gravité de l'appareil complet, avant l'addition du poids P, soit sur la verticale passant par le centre de l'arbre, on a pour le travail en chevaux :

$$N = \frac{2\pi n\,(PL - qL')}{60 \times 75}$$

q est l'action exercée au point O, c'est ici une traction de haut en bas.

Si le poids du frein n'était pas équilibré avant l'addition du poids P, il faudrait introduire son moment à côté de celui des autres forces, soit p ce poids, l la distance comprise entre le point O et la verticale passant par le centre de gravité, le moment à ajouter sera :

$$\pm pl,$$

le signe + ne doit être pris que si le centre de gravité est à droite du point O.

Le frein Appold admet un grand nombre de dispositions, celle de la figure 155 est équivalente à la précédente; toutefois, la réaction q prend une autre valeur que dans le premier cas ; cette disposition rend inutile la correction de poids (1).

Le frein Appold est très employé en Angleterre.

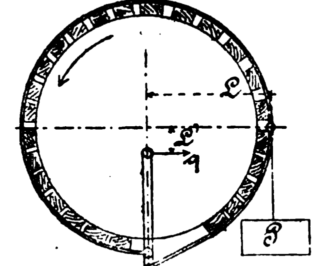


Fig. 155

1. Frein employé par M. Halpin, Engineering, 1882, 1er sem., p. 394.

164. — Dans le *frein de Marcel Deprez* (fig. 156), les bras portant les mâchoires sont articulés sur un plateau muni d'un contrepoids M destiné à équilibrer les masses excentriques ; les bras BB sont tenus rapprochés par un poids *p*, appliqué au levier C, en un point qui coïncide

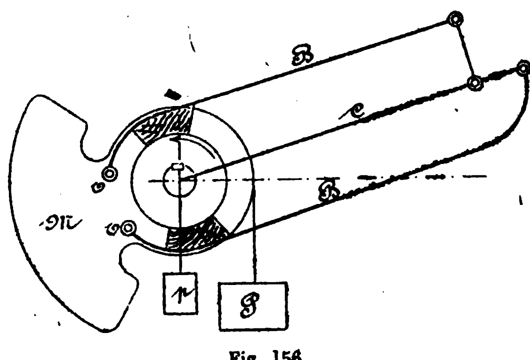


Fig. 156

sensiblement avec le centre de l'arbre ; la charge qui équilibre la résistance est P ; lorsque le frein tend à s'emporter, l'effet de *p* diminue de plus en plus, il cesserait même tout à fait si le levier C devenait vertical. L'effort *p*, passant par le centre, ne doit pas intervenir dans la charge du frein.

165. — Le frein imaginé par M. Brauer, professeur à Darmstadt, comporte une lame flexible pour les volants à jante plate, et une série de fils métalliques de 7 à 8 millimètres de diamètre, pour les volants à gorge ; il se rapproche, par le principe, du frein Appold, mais son mécanisme de réglage est un peu différent ; le frottement a lieu de métal à métal, et le graissage se fait à l'huile ; M. Brauer considère l'emploi de ce frein comme possible lorsque le volant présente avec l'air une surface de contact d'au moins 10 décimètres carrés par cheval. M. Walther-Meunier s'en est servi pour l'essai d'une machine de 250 chevaux (1).

166. — *Appareils funiculaires.* — On emploie, pour l'essai de petits moteurs, une simple poulie à gorge, sur laquelle passe une corde en chanvre, la corde enveloppe la poulie sur les 3/4 de la circonférence ;

1. *Compte-rendu* des séances du 11e Congrès des Ingénieurs en chef, tenu à Paris en 1886. — *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*, 1884 p. 485.

soient P et t les tensions des deux brins (fig. 157), le travail en chevaux est :

$$N = \frac{2\pi n R}{60 \times 75}(P - t)$$

R étant le rayon mesuré à l'axe de la corde et n le nombre de tours par minute.

La tension t peut être évaluée au moyen d'un dynamomètre, mais on constate généralement qu'elle est négligeable ; en se reportant au tableau du n° 95, on trouve en effet pour le cas considéré, avec une gorge de 60°, un arc embrassé égal à $0{,}75 \times 2\pi$ et $f = 0{,}28$:

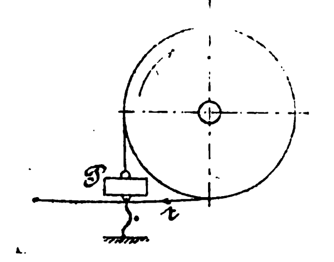


Fig. 157

$$\frac{P}{t} = 14 \text{ environ}$$

en négligeant t, on commet donc une erreur de $\frac{1}{14}$, soit un peu plus de 7 % ; pour opérer exactement, il faudrait du reste tenir compte du poids non équilibré de la corde sur la poulie ; ce frein est d'un emploi commode pour l'essai des moteurs à gaz ; il est bon de se garantir contre les projections possibles du poids qui présentent beaucoup de danger.

167. — *Frein à bande, d'Imray ou de Carpentier, perfectionné par Raffard.* — Nous nous bornerons à donner le principe de cet ingénieux appareil tel qu'on le trouve appliqué dans le frein dynamométrique de M. N.-J. Raffard [1] ; celui-ci (fig. 158) se compose d'une poulie A, calée sur l'arbre qui communique le travail, et de deux poulies folles BB, placées de part et d'autre de la précédente ; un étrier embrassant les trois poulies supporte une traverse t, qui s'oriente comme on veut autour de l'arbre, et sur laquelle agissent, vers le haut, des sangles en chanvre S S, tendues au moyen d'un poids P, et vers le bas, la sangle S_1, tendue par le poids p.

Si nous supposons la poulie A entraînée par l'arbre, et la sangle S_1

1. *Revue technique de l'Exposition Universelle de* 1889. — *Congrès de mécanique appliquée*, p. 267.

fixe, l'effort circonférentiel résistant sera $P - p$, il sert directement à la mesure du travail.

On a :

$$P - p = (e^{f\alpha} - 1) p$$

On voit que l'arc embrassé α, sur la poulie A, doit varier en sens inverse de f, c'est-à-dire que l'arc de contact nécessaire pour équilibrer un même effort $P - p$, dépend du coefficient de frottement ; si celui-ci

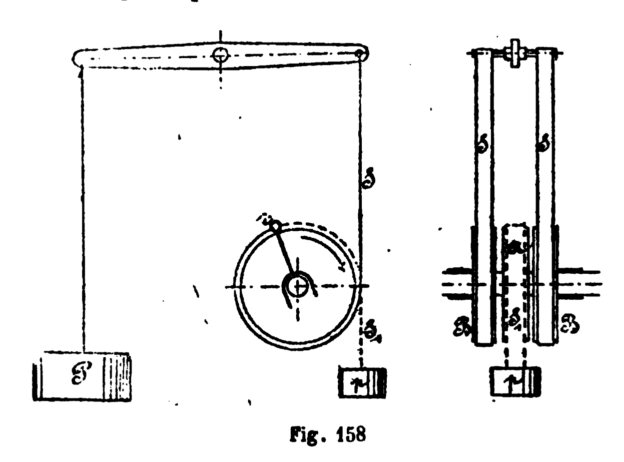


Fig. 158

vient à diminuer et prend la valeur f_1, la tension au point t prend la valeur :

$$X = pe^{f_1\alpha}$$

laquelle est plus petite que P, cette dernière force l'emporte donc, et l'arc embrassé augmente automatiquement, de manière à donner sur la jante de la poulie une résistance constante $P - p$, déterminée par les contrepoids p et P appliqués à l'appareil.

168. — *Frein enregistreur de Brotherhood.* — Le levier du frein, au lieu d'être équilibré par un poids que l'on fait varier d'après la résistance, agit sur un piston qui transmet sa pression à un liquide renfermé dans un petit récipient ; sur celui-ci est monté un indicateur analogue à ceux qui servent à l'essai des machines à vapeur, sauf que

le tambour y est remplacé par une bande de papier à mouvement continu [1].

169. — *Dynamomètre de Froude* [2]. — Cet appareil consiste en une roue de turbine axiale, calée sur l'arbre, et enveloppée dans une coquille qui présente des aubes dirigées à contre-sens, de manière à créer une grande résistance au mouvement; la coquille est concentrique à l'arbre, et laisse passer celui-ci par un bourrage, elle est maintenue immobile par un bras qui joue le même rôle que celui du frein de Prony et que l'on peut tarer au moyen de poids; afin d'éviter les actions latérales, l'appareil est double, l'eau arrive par l'enveloppe extérieure, il est nécessaire de la renouveler d'une manière continue, de manière à limiter son accroissement de température.

La résistance est ici d'une régularité absolue [3], on peut l'augmenter ou la diminuer au moyen de vannes régulatrices qui agissent sur la section des canaux fixes et mobiles en présence.

L'appareil employé à l'Exposition d'électricité de Londres en 1882 avait $0^m,700$ de diamètre environ; le travail qui peut être absorbé augmente, paraît-il, comme le cube de la vitesse, ce qui du reste importe peu, attendu que la puissance est mesurée comme dans le frein de Prony; à 100 révolutions par minute la puissance qui peut être consommée est de 20 chevaux; à la vitesse double de 200 tours, l'appareil pourrait absorber une puissance de 160 chevaux.

170. — *Remarque sur l'emploi des freins.* — Il résulte de ce qui précède que les essais au frein constituent un procédé de mesure par substitution, puisque, suivant l'expression de Hirn, on substitue le frein à l'usine et l'on cherche à mettre le moteur aussi exactement que possible dans les conditions où il se trouve pendant le travail industriel.

L'opération est toujours assez difficile à conduire, car il faut régler le serrage, maintenir la vitesse constante, et combattre l'échauffement; l'appareil est assez volumineux, même pour de faibles puissances; néanmoins, le frein est d'un grand secours lorsqu'il s'agit de vérifier le rendement organique d'un moteur, il n'est pas toujours nécessaire de

1. Engineering, 1889, 1er sem., p. 664.
2. Engineering, 1877, 2e sem., pp. 67, 90, 95 et 349, même recueil 1882, 1er sem. p. 241.
3. M. Osborne Reynolds emploie un frein du même genre sur la machine d'expériences du collège Owens, à Manchester.

procéder à un essai de longue durée; il suffit, à la rigueur, d'avoir, s'il s'agit d'une machine à vapeur, quelques tarages bien précis du frein aux instants où l'on fait des relevés à l'indicateur; en opérant dans des conditions différentes de charge, on obtient des données du plus haut intérêt sur le travail des résistances accessoires des moteurs. Mais dans l'état actuel de la question, l'essai au frein n'est pas possible pour les moteurs de très grande puissance; pour ceux-ci, on doit se contenter, lorsqu'il s'agit de machines à pression, de mesurer le travail à l'indicateur, ou travail indiqué.

§ IV.

DYNAMOMÈTRES DE TRANSMISSION

171. — Ces appareils n'exigent pas l'arrêt de l'usine, ils sont intercalés dans la transmission qui relie le récepteur à l'opérateur, et permettent d'apprécier d'une manière continue, ou même de totaliser le travail transmis; placés immédiatement près du moteur, ils donnent à la fois la puissance effective développée et le travail absorbé par l'ensemble des appareils de fabrication; placés près d'un opérateur, ils fournissent des données sur le travail absorbé par cette machine seule. Ils n'ont été réalisés d'une manière pratique que pour les petites forces, cependant, Hirn a indiqué le principe d'appareils qui pourraient servir à la mesure de travaux quelconques.

PREMIER GROUPE

Dynamomètres basés sur la déformation d'une pièce.

172. — *Dynamomètre de rotation de Morin.* — L'appareil de cette espèce appartenant à la collection de machines de l'Ecole de Génie civil de Gand se compose de trois poulies P_1 P_2 P_3 (fig. 159), montées sur un

bout d'arbre spécial, AA ; P_1 reçoit la courroie motrice, P_3 donne le mouvement à la courroie qui mène l'opérateur, la poulie P_2 est folle et reçoit la courroie motrice lorsqu'on ne veut rien transmettre.

La poulie P_1 est calée sur l'arbre, lequel entraîne la poulie P_3 par l'intermédiaire d'un manchon M, muni de deux ressorts L, L, qui viennent

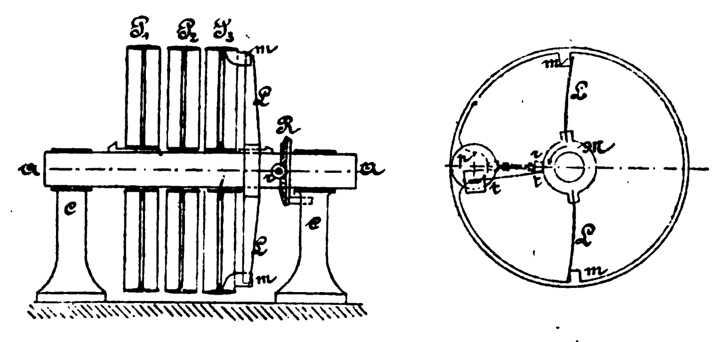


Fig. 159

appuyer contre des mentonnets venus de fonte à la jante de la poulie P_3; cette dernière est donc entraînée à partir du moment où la tension des ressorts équilibre la résistance, et il en résulte que la flèche des ressorts ou le déplacement angulaire relatif des poulies P_1 et P_3 mesure l'effort circonférentiel transmis ; le travail étant proportionnel au produit de cet effort par le déplacement absolu de la poulie P_3, il faut employer une disposition qui donne ce produit intégré pour toute la durée de l'expérience ; on y arrive par le procédé suivant : sur l'un des bras de P_3 est monté un plateau p qui reçoit son mouvement d'un petit arbre dirigé suivant le rayon et qui porte vers le centre une roue d'angle r, tournant autour de la roue R, concentrique à l'arbre, mais fixée au support de l'arbre ; le plateau p tourne ainsi autour de son centre et sa vitesse est proportionnelle à celle de la poulie.

Le manchon M porte un bras tt muni d'une roulette reposant sur le plateau; lorsque la flèche des ressorts est nulle et qu'il n'y a pas d'effort, la roulette est au centre du plateau ; lorsque la résistance existe, elle s'écarte du centre de ce plateau et roule sur une circonférence dont le rayon est proportionnel à l'effort.

Pour obtenir le travail transmis pendant un certain temps, il suffit, au moyen d'un compteur, de relever le nombre de tours de la roulette ; si l'on a déterminé, par une expérience préalable, les constantes relatives

à l'effort, ainsi que les rayons, ou les nombres de dents figurant comme facteurs de la vitesse, on possède les éléments nécessaires à la détermi nation du travail.

173. — *Pandynamomètres* (1). — Hirn a mesuré des travaux considérables en enregistrant la déformation d'une pièce par laquelle passe tout l'effort transmis ; dans la limite des tensions de travail admises pour les pièces de machines, l'élasticité des matériaux est plus parfaite que celle des ressorts employés pour mesurer les forces ; ces pièces constituent de véritables dynamomètres dont le seul défaut est de donner des déformations très faibles, il faut donc d'abord les amplifier au moyen de leviers très légers dont l'inertie ne puisse altérer les résultats ; les déformations sont inscrites en même temps que les déplacements de la pièce, on obtient ainsi des diagrammes qui peuvent donner lieu aux mêmes calculs que les courbes d'indicateur.

Hirn indique surtout deux genres de pièces qui peuvent être utilisées pour le but que nous avons en vue, les pièces fléchies telles qu'un balancier de machine à vapeur, et les pièces tordues, telles qu'un arbre ou une ligne d'arbres. Il est évident qu'il faut toujours, au moyen d'une expérience directe, déterminer le rapport existant entre les efforts et les déformations, c'est ce qui constitue la véritable difficulté d'établissement de ces appareils. Pour une machine à vapeur, on peut, aux points morts et le moteur arrêté, déterminer les efforts exercés sur le piston en évaluant la pression à l'aide d'un manomètre à air libre bien gradué, Hirn a établi sur une machine du Logelbach un pandynamomètre de flexion qui a servi à relever un très grand nombre de diagrammes, ceux-ci ont toujours donné l'accord le plus parfait avec les courbes d'indicateur, ou, tout au moins, les différences observées représentent bien les valeurs probables du frottement du piston et des autres organes situés entre cette pièce et le point où la flèche a été mesurée. Hirn jugeait possible l'emploi d'un pandynamomètre de torsion pour mesurer les travaux les plus considérables transmis à l'hélice d'un navire.

1. *Les Pandynamomètres*, par G. A. Hirn. — Gauthier-Villars, 1876. — *C. Résio.* Application du téléphone à la mesure de la torsion de l'arbre moteur de machines en mouvement. *Revue universelle des Mines*, 2e série, T. VII, p. 632.

DEUXIÈME GROUPE

Dynamomètres à engrenages.

174. — *Le dynamomètre de Rieter* [1] (fig. 160) comprend trois arbres A_1, A_2, A_3; les arbres A_1 et A_3 sont montés sur un bâti rigide, l'un porte la poulie réceptrice P, l'autre la poulie P' qui commande l'usine

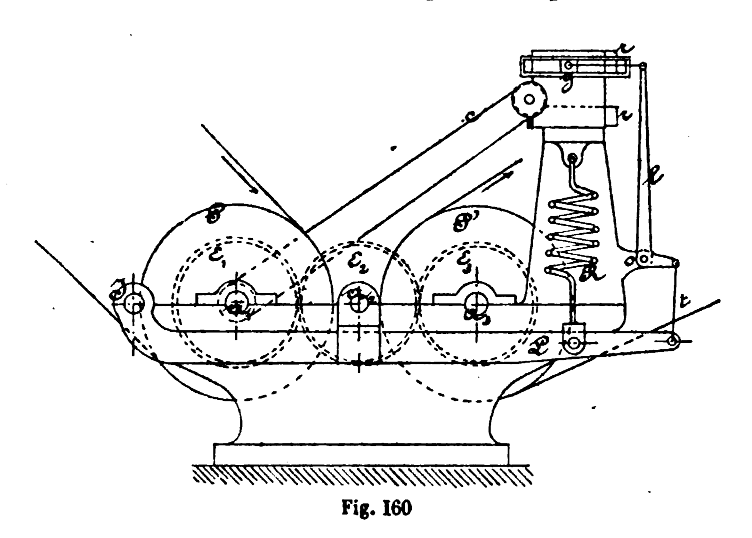


Fig. 160

ou l'opérateur; sur les arbres A_1 et A_3 sont calés deux engrenages E_1 E_3 reliés par une roue intermédiaire E_2, portée par l'arbre A_2, dont les paliers reposent sur un châssis formé de deux longerons L, articulés en I sur le bâti fixe et soutenus à l'autre extrémité par un ressort R. Le longeron fait mouvoir par son extrémité, au moyen de la tringle *t*, un levier coudé *l*, qui pivote autour du point fixe *o*; ce levier commande, par l'extrémité de sa longue branche, un coulisseau guidé en ligne droite *g*, qui inscrit les déformations du ressort R, en les amplifiant; l'appareil enregistreur se compose d'une bande de papier passant sur les deux tambours *r r* à axe horizontal, ceux-ci reçoivent de l'arbre A_1, au moyen

1. Constructeur à Töss, près de Winterthur. — Engineering, 1884, 1er sem., p. 500.

d'une petite transmission mue par la corde *c*, un mouvement de rotation proportionnel à celui de l'arbre moteur, il en résulte que la courbe tracée sur le papier continu présente les éléments du diagramme du travail ; les frottements propres de l'appareil, dépendant du travail transmis, ne peuvent être évalués avec une entière certitude, c'est du reste là un défaut commun à tous les instruments de l'espèce.

Le dynamomètre en question peut mesurer jusqu'à 12 chevaux, pour une vitesse de 200 révolutions des arbres.

175. — *Dynamomètre de Sellers.* — MM. Sellers ont employé dans leurs expériences sur les vis tangentes (n° 75) une forme du dynamomètre à engrenages qui présente l'avantage d'éliminer le frottement des arbres sur leurs tourillons ; A est l'arbre auquel on doit communiquer un travail à mesurer (fig. 161), E est une roue calée sur cet

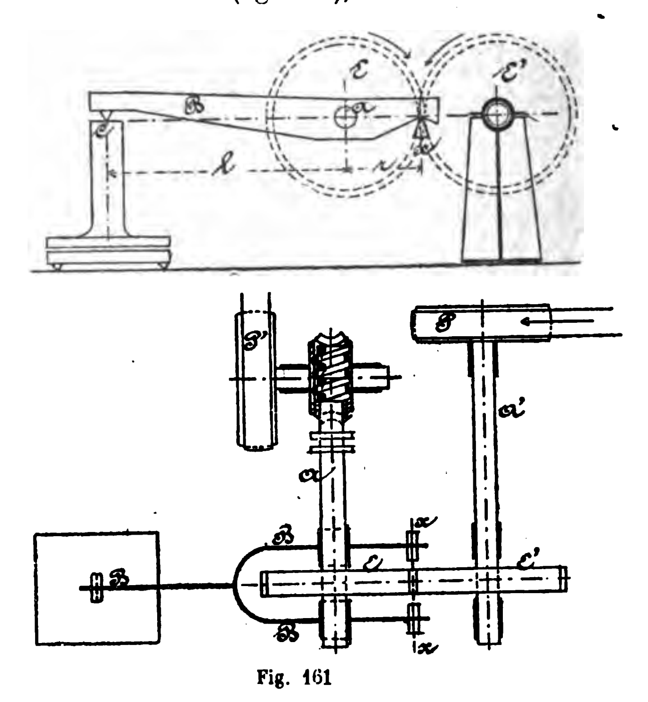


Fig. 161

arbre, E' est la roue qui lui communique la force motrice reçue par l'intermédiaire de la poulie P. La roue E est montée entre les branches d'un étrier BB, qui supporte l'arbre A en prenant appui, d'une part, sur

une ligne de couteaux xx, passant par la génératrice de contact des cylindres primitifs des roues, d'autre part sur le plateau d'une balance, au moyen d'un couteau C dont l'arête se trouve, avec l'axe de l'arbre et la ligne xx, dans un même plan horizontal.

La transmission s'opère toujours par deux dents qui sont en contact très près de la ligne des centres ; soit R la pression normale transmise à la dent de la roue E, p la réaction de la balance, ρ le rayon des tourillons de l'arbre, φ l'angle du frottement.

On a, pour l'équilibre de l'étrier BB autour de la ligne xx :

$$p(l+r) = R(r - \rho \sin \varphi)$$

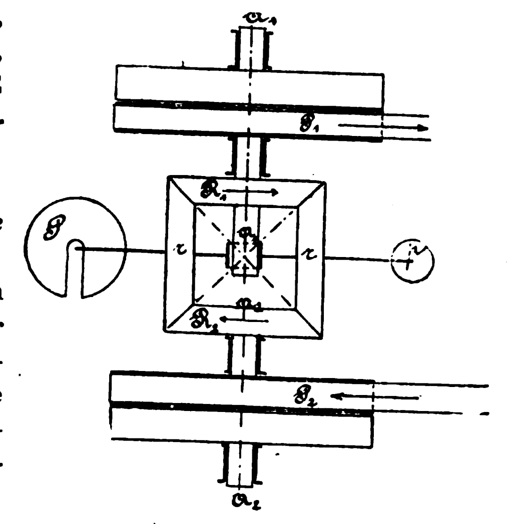
d'autre part, la puissance en chevaux transmise à l'arbre A, pour n tours par minute, a pour expression, si l'on en déduit le travail absorbé par le frottement des tourillons :

$$N = \frac{2\pi n}{60 \times 75} R(r - \rho \sin \varphi)$$

d'où

$$N = \frac{2\pi n}{60 \times 75} p(l+r)$$

On voit que l'on obtient directement le travail net transmis ; on pourrait évidemment tenir compte, dans les équations ci-dessus, du poids propre de la roue E et de l'étrier B, qui sont connus avec certitude.



176. — *Dynamomètre de White.* — L'arbre A_1 (fig. 162) reçoit le travail moteur de la poulie P_1, il le transmet, par l'intermédiaire des roues coniques R_1, r, r, R_2, à l'arbre A_2, sur lequel est calée la poulie P_2 actionnant les résistances.

Les poulies *rr* constituent avec leur arbre *aa*, sur lequel elles tournent folles, un système libre autour de l'axe A_1 A_2, et qui peut être équilibré par le poids P lorsque la transmission s'opère ; le poids *p* sert à équilibrer le plateau. La connaissance de P et du bras du levier *l* permet d'évaluer le travail transmis [1].

On trouve des dynamomètres du même genre, dans lesquels l'une des roues *r* est supprimée.

TROISIÈME GROUPE

Dynamomètres à courroies.

177. — Ce groupe comprend les dynamomètres à courroie, basés sur la mesure des tensions du brin conducteur et du brin conduit d'une courroie de transmission.

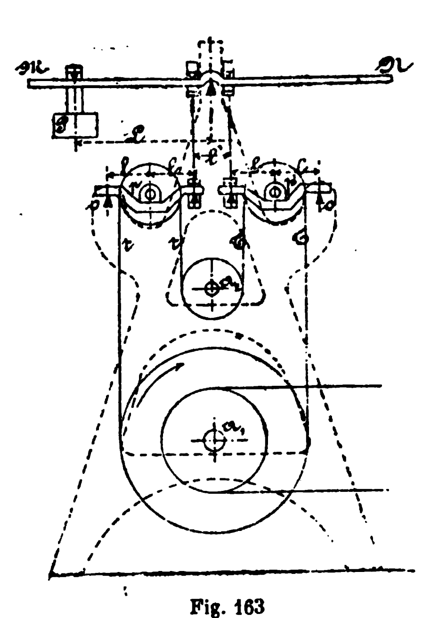


Fig. 163

Les appareils Denis-Farcot [2] et celui de l'Institut Franklin [3] sont conçus d'après le même principe ; la figure 163 représente le schéma de ce dernier appareil.

L'arbre A_1 reçoit la force motrice et la communique à l'arbre A_2, qui actionne la résistance ; la transmission s'opère par une courroie dont les brins font retour sur les deux poulies p, p'. Abstraction faite des résistances passives, si on désigne par t et T les tensions dans les brins de la courroie, on voit que la poulie p est sollicitée vers le bas par une force $2t$, la poulie p' est sollicitée de même par une force $2T$; les axes de ces poulies posent au

1. *Balance Dynamometer constructed by the Lawrence Machine Shop, Massachusetts*, Engineering, 1886, 2e sem., p. 605.
2. Buchetti. — *Guide pour l'essai des machines.*
3. Engineering, 1884, 1er sem., p. 560.

milieu de leviers à bras égaux, appuyés sur couteaux à l'une de leurs extrémités, il en résulte que les tringles de suspension exercent sur le fléau MN, de part et d'autre du pivot, les tractions t et T. Le fléau est équilibré quant à son poids ; soit P le poids qui, agissant à la distance L du couteau, équilibre T et t, l' la distance des tringles, on a :

$$(T - t)\frac{l'}{2} = PL$$

d'où :

$$T - t = 2P\frac{L}{l'}$$

Pour la puissance transmise à l'arbre A_1, on aura, si R est le rayon de la poulie augmenté de la demi-épaisseur de la courroie, et si n est le nombre de tours par minute :

$$N = \frac{2\pi nR(T - t)}{60 \times 75} = \frac{4\pi RP}{4500\, l'} Ln$$

Ayant déterminé une fois pour toutes la valeur du coefficient constant, il suffit, pour obtenir le travail, de le multiplier par la longueur L et par le nombre de tours.

178. — *Dynamomètre de la maison Siemens.* — Il se compose de

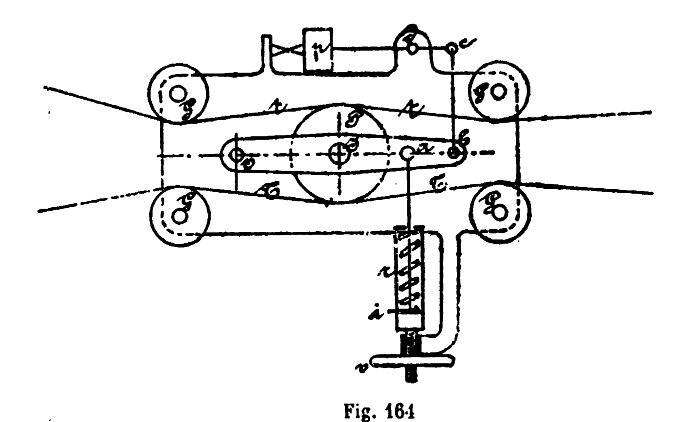


Fig. 164

quatre galets G (fig. 164), montés sur un châssis évidé non représenté sur la figure; autour de l'axe O pivote un bras qui porte la poulie P; ce

bras est équilibré au moyen du contrepoids *p* monté sur un levier oscillant autour du point fixe *d*; la tringle *bc* établit la liaison entre les deux systèmes; un repère, monté à l'extrémité du levier *l*, permet de voir si le bras *ob* est bien dirigé suivant la ligne médiane du système.

Les brins de la courroie sont représentés en T et *t*; les rayons des galets sont déterminés de telle manière que, dans la position normale, la courroie doive s'infléchir sur la poulie P. Pour maintenir la position, normale, il faut, au moyen d'un ressort *r*, que l'on comprime plus ou moins à l'aide du volant *v*, équilibrer le bras; la compression du ressort est proportionnelle à T — *t*.

Tout l'appareil, monté sur un support en bois, est placé dans une position telle que ce support soit peu sollicité, il peut être appliqué à une courroie existante, et a été employé pour mesurer la puissance transmise à de petites machines dynamo-électriques, il ne se prête pas à des mesures d'une grande précision.

179. — *Dynamomètre de M. Donat-Bânki* [1]. — Cet appareil est construit par Ganz et Cie, à Buda-Pest; les galets sur lesquels passent les brins de tension T et *t* sont montés sur les deux branches d'une pièce en croix, qui appuie à l'une de ses extrémités sur un couteau contrebalancé par un levier. Ce levier agit lui-même sur un indicateur Richards au moyen d'une tringle très légère rattachée à une pièce qui remplace le piston, devenu inutile, de l'indicateur; le papier qui recueille l'inscription du diagramme reçoit, de l'un des arbres, un mouvement de translation continu. Ce dynamomètre convient, parait-il, pour des puissances variant de 1 à 100 chevaux, il est disposé sous une forme compacte et élégante.

1. *Praktische Maschinen Constructeur*, 1886, p. 349. — Engineering, 1886, 2e sem. p. 261.

TABLE DES MATIÈRES

THÉORIE DES MÉCANISMES

§ II.

Du frottement des liquides sur les solides.

§ III.

Résistance au roulement.

§ IV.

Raideur des cordes.

§ V.

Travail absorbé par les chocs.

CHAPITRE III.

Equilibre des mécanismes soumis à des résistances passives.

§ I.

Systèmes dans lesquels on n'a à considérer que le frottement.

§ I

Du volant.

Premier cas.

SYSTÈME DE PIÈCES TOURNANTES.

Deuxième cas.

SYSTÈME COMPRENANT DES MASSES ANIMÉES D'UN MOUVEMENT ALTERNATIF.

§ II.

Du régulateur.

A. Régulateurs à contrepoids.

I. Régulateurs du premier genre.

II. Régulateurs du second genre.

B. Régulateur à ressorts.

CHAPITRE IV.

Mesure expérimentale du travail des forces et de la puissance des machines

§ I.

Travail produit par une force isolée.

§ II.

Travail produit par la pression d'un fluide.

§ III.

Travail moteur disponible sur un arbre.

§ IV.

Dynamomètres de transmission.

Premier groupe.

Dynamomètres basés sur la déformation d'une pièce.

Deuxième groupe.

Dynamomètres à engrenages.

Troisième groupe.

Dynamomètres à courroie.

Paris. — Imp. E. Bernard & Cie, 71, rue La Condamine

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE SPÉCIALE DU GÉNIE CIVIL DE GAND

PAR

J. BOULVIN

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS MARITIMES DE L'ÉTAT BELGE

Fascicules devant paraître dans le courant des années 1891 et 1892

1er Fascicule. — Théorie générale des machines. — Étude des résistances passives dans les organes de transmission. — Théorie des régulateurs du mouvement.
2e Fascicule. — Moteurs animés, récepteurs hydrauliques, récepteurs pneumatiques.
3e Fascicule. — Théorie des machines thermiques et son application aux moteurs à air chaud, à gaz et à vapeur, aux appareils frigorifiques. — Essais scientifiques, épreuves pratiques des moteurs.
4e Fascicule. — Chaudières à vapeur.
5e Fascicule. — Machines à vapeur.
6e Fascicule. — Machines servant aux transports (locomobiles et bateaux à vapeur).
7e Fascicule. — Machines servant à déplacer les fluides.
8e Fascicule. — Transport du travail à longue distance, applications de l'air comprimé et de l'eau sous pression, appareils de levage, ascenseurs.
9e Fascicule. — Matériel pour l'action des travaux de genre civil. — Machines servant à battre les pieux et palplanches. — Excavateurs. — Dragueurs. — Machines perforatrices.

Ces Fascicules seront vendus séparément au fur et à mesure de leur publication.

Les Fascicules 1 et 7 sont parus, le 2 va paraître.

TECHNOLOGIE PROFESSIONNELLE

DES

ARTS & MÉTIERS

PAR

A. GUETTIER, Ingénieur

Ancien Professeur de l'École des Arts et Métiers de Châlons
Directeur des Hauts-fourneaux et Fonderies de Marquise

Sous le titre de **Technologie professionnelle des Arts et Métiers**, nous venons de terminer avec l'aide et sous la direction de M. A. Guettier (l'auteur connu de nombreuses publications industrielles) une série d'ouvrages qui ont pour but de propager en le vulgarisant, l'enseignement technique des Arts et Métiers. Ces écoles spéciales ayant pour objet principal l'étude théorique et pratique des sciences et des arts mécaniques.

En d'autres termes, nous voulons aborder, tout d'abord, les métiers qui se rattachent directement à l'emploi du bois et du métal et à sa transformation par la main-d'œuvre et la fabrication suivant les besoins multiples du mécanicien et du constructeur.

Outillage, machines, appareils et matériel des constructions publiques ou civiles, des chemins de fer, de navigation, des engins de guerre, etc., tout cela avec le concours des sciences physiques et chimiques, mène aux industries les plus étendues et les plus diverses, ayant pour objet de façonner le bois et le métal.

La première série de la collection que nous terminons se compose de quatre volumes traitant des arts industriels enseignés dans les écoles professionnelles de l'Etat et qui sont comme le point de départ de toutes les autres professions, en ce sens qu'ils apportent les éléments les plus essentiels à leur vitalité, et les moyens de travailler la matière en l'appropriant à toutes applications voulues, avec l'aide des agents mécaniques et d'un outillage spécial.

DIVISION DE L'OUVRAGE

PREMIER VOLUME :

LE MENUISIER-MODELEUR-MÉCANICIEN

Division du Premier volume :

1re PARTIE. — Le bois.	3e PARTIE. — Construction des Modèles.
2e PARTIE. — Organisation des Ateliers.	4e PARTIE. — Détails de Fabrication.

L'ensemble comprend un volume de texte, grand in-8 de 220 pages et un album du même format de 44 planches. — Prix : **10** francs.

DEUXIÈME VOLUME :

LE FORGERON-MÉCANICIEN

Division du Deuxième volume :

1re PARTIE. — Matières premières.
2e PARTIE. — Installation des Ateliers de forge.
3e PARTIE. — Fabrication des pièces.
4e PARTIE. — Travaux divers du Fer et de l'Acier.

L'ensemble comprend un volume de texte grand in-8 de 240 pages et un album du même format de 40 planches. — Prix : 10 francs.

TROISIÈME VOLUME :

LE CONSTRUCTEUR-MÉCANICIEN

Division du Troisième volume :

1re PARTIE. — Matériaux employés dans la Construction des machines.
2e PARTIE. — Organisation des Ateliers.
3e PARTIE. — Transmission du mouvement
4e PARTIE. — Données de Fabrication.
5e PARTIE. — Données économiques et Documents divers.

L'ensemble comprend un volume de texte, grand in-8 de plus de 300 pages et un atlas de 50 planches du même format. — Prix 12 francs.

QUATRIÈME VOLUME :

LE FONDEUR EN MÉTAUX

Division du Quatrième volume :

1re PARTIE. — Matières premières.
2e PARTIE. — Fonderie de première fusion.
3e PARTIE. — Fabrication en Moulage.
4e PARTIE. — Fabrications diverses.

L'ensemble comprend un volume d'environ 350 pages et un atlas de 52 planches du même format. — Prix : 12 francs.

La Bibliothèque de technologie professionnelle des Arts et Métiers, avec ses nombreuses figures parfois plus explicites que de longues descriptions, et basée sur un fond de théorie simple et pratique raisonnée est destinée à renouveler, en les rajeunissant, les petits volumes guides pratiques, traités élémentaires, manuels, etc., des anciennes collections plus ou moins techniques dont la plupart remontent à la première partie du siècle et dont les plus récentes datent de 1850 à 1860.

L'ouvrage complet comprenant 4 volumes et 4 atlas. - Prix : **40 fr.**

